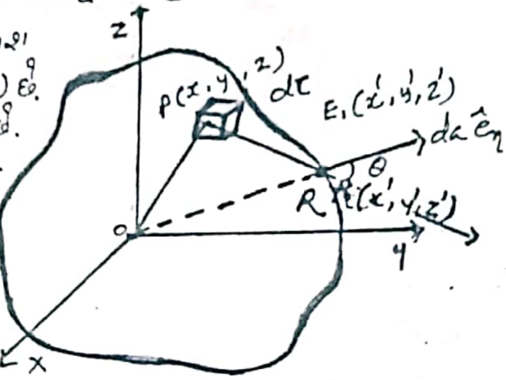
Ch : 7 સ્થિર વિદ્યુત

ગૉસનો નિયમ :-> [સંકલન અને વિકલન સ્વરૂપમાં]



આકૃતિ (1) માં એક બંધ પૃષ્ઠથી ઘેરાતો અવકાશ દર્શાવેલો છે. ધારોકે વિદ્યુતભાર વિતરણ $\rho(x, y, z)$ છે. એટલેકે એકમ કદ દીઠ ρ કુલંબ વિદ્યુતભાર રહેલો છે. ρ = વિદ્યુતભાર ઘનતા છે. બિંદુ (x, y, z) પાસે સૂક્ષ્મકદ ખંડ $d\tau$ માં રહેલો વિદ્યુતભાર $\rho\, d\tau$ થશે. જો $d\tau$ અત્યંત સૂક્ષ્મ લેવામાં આવે તો $d\tau \to 0$ થવાથી આ વિદ્યુતભાર બિંદુ (x, y, z) પાસે બિંદુવત વિદ્યુતભાર થશે. પૃષ્ઠપર બિંદુ $R(x', y', z')$ પાસે $d\vec{a}$ પૃષ્ઠખંડ લેવામાં આવે છે.

ઊગમબિંદુ O થી સૂક્ષ્મકદખંડ $d\tau$ નાં સ્થાન-સદિશને $r(x, y, z)$ અને પૃષ્ઠખંડ $d\vec{a}$ નાં સ્થાન સદિશને $r'(x', y', z')$ વડે દર્શાવતાં. $\therefore PR = \vec{r}\,' - \vec{r}$

હવે P બિંદુ પાસેના $\rho\, d\tau$ વિદ્યુતભારને લીધે R- પાસે ઉદ્ભવતી વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

$$\vec{E_1}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}\,' - \vec{r}}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|}$$

{ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\hat{r}$

$$\vec{E_1}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau\, (\vec{r}\,' - \vec{r})}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^3} \quad \text{------(1)}$$

આ વિદ્યુતતીવ્રતાને લીધે $d\vec{a}$ જેટલાં પૃષ્ઠસાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ $dF = \vec{E_1} \cdot d\vec{a}$ ----(2)

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2} \cdot \frac{(\vec{r}\,' - \vec{r}) \cdot d\vec{a}}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2} \times \frac{|\vec{r}\,' - \vec{r}|\, |da|}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|}$$

$$\therefore d\vec{F} = \frac{d\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2} \cdot |da| \cos\theta \quad \text{-------(3)}$$

$\left[(\vec{r}\,' - \vec{r}) \cdot da = |\vec{r}\,' - \vec{r}|\, |da| \cos\theta \quad \therefore \frac{(\vec{r}\,' - \vec{r}) \cdot d\vec{a}}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|} = |da| \cos\theta \right]$

પરંતુ $\frac{|da| \cos\theta}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2}$ એ da જેટલા પૃષ્ઠખંડને લીધે P બિંદુ પાસે મળતો ઘનકોણ છે. તેને $d\Omega$ વડે દર્શાવતાં $|da| \cos\theta / |\vec{r}\,' - \vec{r}| = d\Omega$ ની કિંમત સમી.(3) માં મૂકતાં

$$\therefore dF = d\tau / 4\pi\epsilon_0 \cdot \rho(x, y, z) \cdot d\Omega \quad \text{--------(4)}$$

$\rho(x, y, z)\, d\tau$ જેટલાં વિદ્યુતભાર વડે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રને કારણે સમગ્ર બંધપૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ શોધવા માટે સમી. (4) નું સમગ્ર પૃષ્ઠપર સંકલન કરવું પડે. આ સંકલન કરતી વખતે $d\Omega$ શૂન્યથી 4π વચ્ચે બદલાય છે. માટે, સમગ્ર પૃષ્ઠસાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ $\int_S dF = \frac{\rho(x, y, z)}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\tau \int_0^{4\pi} d\Omega$

પરંતુ, $\int_0^{4\pi} d\Omega = [\Omega]_0^{4\pi} = 4\pi - 0 = 4\pi \qquad \therefore \int_S dF = \frac{\rho(x, y, z)}{4\pi\epsilon_0} d\tau \cdot 4\pi = \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{\epsilon_0}$ --------(5)

ઉપરોક્ત સમી. ની જમણી બાજુનું બંધ પૃષ્ઠના પૃષ્ઠથી ઘેરાતાકદ પર કદ સંકલન લઈએ તો આ કદમાં ઘેરાયેલા સમગ્ર વિદ્યુતભાર વડે મળતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું સમગ્ર બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ મળશે. સમી.(5) માં $dF = \vec{E_1} \cdot d\vec{a}$ મૂકતાં.

$$\therefore \int_S \vec{E_1} \cdot d\vec{a} = \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{\epsilon_0} \qquad \therefore \Sigma \int \vec{E_1} \cdot d\vec{a} = \int \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} d\tau$$

ઉપરોક્ત સમી. માં જુદા-જુદા વિદ્યુતભારોને લીધે મળતી વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાઓનો સરવાળો છે. $\therefore \Sigma \vec{E_1} = \vec{E}$ લેતાં

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int \rho(x, y, z)\, d\tau / \epsilon_0 \quad \text{--------(6)}$$

પરંતુ $\int \rho(x, y, z)\, d\tau = Q$ = કુલવિદ્યુતભાર

$$\boxed{\therefore \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

ઉપરોક્ત સમી. એ ગૉસના નિયમનું સંકલન સ્વરૂપ કહે છે. અને આપેલ પૃષ્ઠને ગૉસિયનપૃષ્ઠ કહે છે.

વિકલન સ્વરૂપ :-

ગોસનાં પ્રમેય પરથી કહી શકાય છે કે, $\int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int div\, \vec{E}\cdot d\tau$ .....(7)

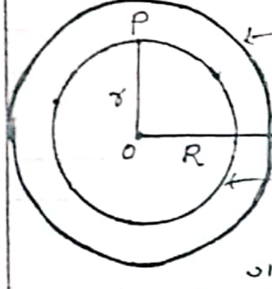
સમી.(6) માં સમી.(7) ની કિંમત મૂકતાં, $\int div\, \vec{E}\cdot d\tau = \int \rho/\epsilon_0\, d\tau$

પરંતુ ઉપરોક્ત સમી. માં આવતું કદ સંકલન ગમે તે યાદરછીક કદ પર લઇ શકાતું હોવાથી બંને બાજુનાં સંકલનો સરખાવી શકાય ∴ $\boxed{div\, \vec{E} = \rho/\epsilon_0}$ અથવા $\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0}$

ઉપરનું સમી. ગોસનાં નિયમનું વિકલન સ્વરૂપ તરીકે ઓળખાય છે.

* :- ગોસનાં નિયમનાં ઉપયોગો :-

[1]: વિદ્યુતભારની ગોળાકાર કવચને લીધે કવચની અંદરનાં બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા :-



ધારોકે R ત્રિજ્યાનાં વર્તુળાકાર વિદ્યુતભાર કવચનાં કોઈ બિંદુ P પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધવી છે. અહીં કવચના કેન્દ્રને, કેન્દ્ર તરીકે લઈ P માંથી પસાર થતું ગોળાકાર ગોસીયન પૃષ્ઠ દોરવામાં આવે છે.

અહીં ગોળાકાર કવચ અને P માંથી પસાર થતા ગોસીયન પૃષ્ઠ ગોલીયસંમિત ધરાવતાં હોવાથી ગોસીયન પૃષ્ઠનાં દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનાં મૂલ્યો સમાન હશે. અને તેની સપાટીને લંબ હશે. આ તીવ્રતાને E(r) વડે દર્શાવતાં.

માટે, ગોસનાં નિયમ પ્રમાણે, $\oint_S \vec{E}\, da = 0$ [∵ અહીં બિંદુ P વિ.ભારીત ગોળાકાર કવચની અંદર આવેલ હોવાથી ગોસીયન પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર શૂન્ય બને.]

$\therefore E \oint_S da = 0$

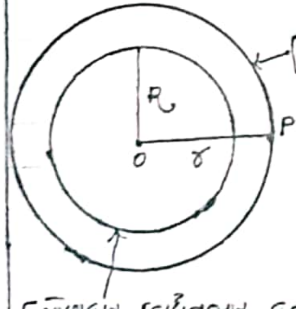
$\therefore E\, 4\pi r^2 = 0$ પરંતુ, $\pi \neq 0$, $r \neq 0$

$\therefore E = 0$ થશે.

આ પ્રમાણે કવચની અંદરના બધાજ બિંદુઓએ ગોસીયન પૃષ્ઠો લઇ તેનો પરથી વિદ્યુતક્ષેત્રોની તીવ્રતા $\vec{E} = 0$ સાબિત કરી શકાય છે.

આમ "ગોળાકાર વિદ્યુતભાર કવચને લીધે કવચની અંદરનાં ભાગમાં ઉદભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે."

[2]: વિદ્યુતભારનાં ગોળાકાર કવચને લીધે કવચની બહારનાં બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા :-



ધારોકે R ત્રિજ્યાવાળા Q વિદ્યુતભાર ધરાવતાં ગોળાકાર કવચની બહારનું બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધવી છે. અહીં કવચનાં કેન્દ્રને, કેન્દ્ર તરીકે લઇ P માંથી પસાર થતું ગોસીયન પૃષ્ઠ દોરવામાં આવે છે.

OP = r ત્રિજ્યાનાં ગોળાને ગોસીયનપૃષ્ઠ તરીકે લેવામાં આવે છે. પરંતુ ગોસીયન-પૃષ્ઠ ગોળીય સંમિત ધરાવતું હોય છે. આ ગોળાનાં દરેક બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E}$ એકસરખી થશે. અને તે સપાટીને લંબ છે.

ગોસનાં નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\oint_S \vec{E}\cdot da = Q/\epsilon_0$

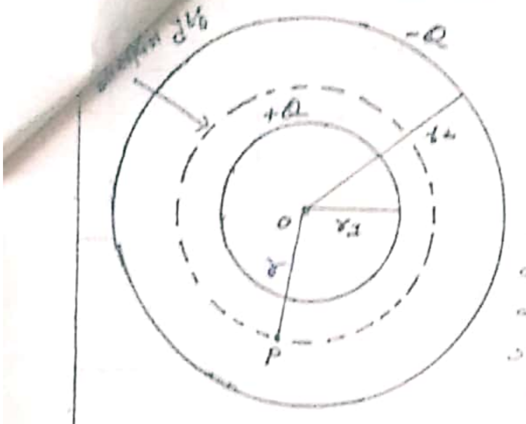
[ગોળાકાર વિદ્યુતભાર કવચની બહારનાં બિંદુ P માટે P માંથી પસાર થતા ગોસીયન પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર Q થશે. કારણકે વિદ્યુતભાર કવચ ગોસીયન પૃષ્ઠની અંદર આવેલું છે. અને તેનો વિદ્યુતભાર ગોસીયન પૃષ્ઠથી ઘેરાતો વિદ્યુતભાર થશે. અને આ Q વિદ્યુતભાર વિદ્યુતભારીત કવચનાં કેન્દ્ર પર હોય તેમ વર્તે છે.]

$\vec{E}\oint_S da = Q/\epsilon_0$ $\therefore \vec{E}\cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0$ $\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot \frac{Q}{r^2}}$

જો વિદ્યુતભાર કવચ પર વિદ્યુતભાર ઘનતા ρ હોય તો તે કવચ પર કુલ વિદ્યુતભાર $Q = 4\pi R^2\cdot\rho$ થશે. $\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{4\pi R^2}{r^2}\cdot\rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2$ થશે.

આમ, "ગોળાકાર વિદ્યુતભાર કવચને લીધે કવચની બહારનાં બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$ OR $\frac{\rho}{\epsilon_0}\cdot(R/r)^2$ હોય છે."

[3]: બે સમાન પણ વિરુદ્ધ પ્રકારનાં વિદ્યુતભારના સમકેન્દ્રીય ગોળાઓને લીધે ગોળાઓના વચ્ચેનાં અવકાશમાં ઉદભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર :-



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે +Q વિદ્યુતભારને લીધે r_1 ત્રિજ્યાનું અને −Q વિદ્યુતભારને લીધે r_2 ત્રિજ્યાનું ગોળાકાર સમકેન્દ્રિય કવચો બને છે.

ધારોકે આ બંને ગોળાકાર કવચો વચ્ચેના અવકાશમાં કોઈ બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધવી છે. અહીં જેની ત્રિજ્યા OP = r હોય તેવું ગોસિયન પૃષ્ઠ લેતાં આ પૃષ્ઠના દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું મૂલ્ય સમાન હશે. અને ધારોકે તેનું મૂલ્ય E છે. તો આખા ગોસિયન પૃષ્ઠ ઉપર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\oint_S \vec{E}\cdot da$, અહીંયા તો $\vec{E}\oint_S da = E\cdot 4\pi r^2$

∴ ગોસિયન પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $= E\cdot 4\pi r^2$ થશે.

આ ગોસિયન પૃષ્ઠ એ +Q વિદ્યુતભાર ધરાવતા કવચની બહાર આવેલુ છે. માટે આ ગોસિયન પૃષ્ઠ પરનાં બધાંજ બિંદુઓ ગોળીય સંમિતિ ધરાવતાં હોવાથી આ ગોસિયન પૃષ્ઠના બધાંજ બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$\oint_S \vec{E_1}\cdot da = Q/\epsilon_0 \quad [\because \oint da = 4\pi r^2, \text{ કારણકે ગોસિયન-પૃષ્ઠ } r \text{ ત્રિજ્યાવાળુ છે.}]$$

$$\vec{E_1}\, 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0 \quad \text{----- (1)}$$

આજ પ્રમાણે ગોસિયન પૃષ્ઠ એ −Q વિદ્યુતભાર કવચની અંદર છે. માટે તેનાં દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શૂન્ય થશે. $\therefore \vec{E_2} = 0$ ----- (2)

સમી. (1) પરથી, $\vec{E_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$ જ્યાં, E_1 = +Q વિ. ભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા, E_2 = −Q વિ. ભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

આમ, કુલ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} + 0 \quad \therefore \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}} \text{ થશે.}$$

ઉપરનું સમી. તે બે સમકેન્દ્રિય ગોળાકાર વિદ્યુતભારીત કવચની વચ્ચેના ભાગમાં રહેલ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા દર્શાવે છે.

***:→ સ્થિત-વિદ્યુતનું અગત્યનું પ્રમેય:→**

કથન:→ ગોળાની અંદર ક્યાંક આવેલ બિંદુવત વિદ્યુતભાર Q ને કારણે, ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રનું સરેરાશ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\langle E\rangle = -Qr_0/3\epsilon_0 V$

જ્યાં Q- બિંદુવત વિદ્યુતભાર છે. r_0 એ વિ. ભાર Q નું સ્થાનસદિશ છે. V ગોળાનું કદ છે.

સાબીતી:→ Q બિંદુવત વિદ્યુતભાર છે. Q વિદ્યુતભારથી દૂર આવેલા r સ્થાન સદિશ ધરાવતા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E}(\vec{r})$ છે. વિદ્યુતભાર Q નો સ્થાનસદિશ r_0 છે.

$$\therefore \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r_0})}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3}$$

આ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું V કદના ગોળા પરનું સરેરાશ એટલે $\frac{1}{V}\int \vec{E}(\vec{r})\,d\tau$
અહીં કદસંકલન આપેલા ગોળાના કદ પર લીધેલ છે.

$$\therefore \langle\vec{E}\rangle = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 V}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r_0})}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3}\,d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{(Q/V)\,(\vec{r}-\vec{r_0})}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3}\,d\tau$$

$$\therefore \langle\vec{E}\rangle = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{(Q/V)\,(\vec{r_0}-\vec{r})}{|\vec{r_0}-\vec{r}|^3}\,d\tau \quad \text{----- (A)}$$

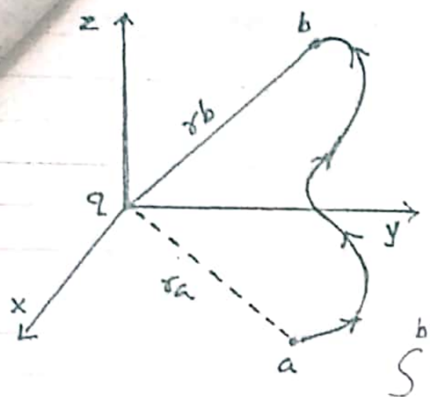
ઉપરોક્ત સમીકરણ Q/V જેટલી વિદ્યુતભાર ઘનતાનું વિતરણ ધરાવતા હોવાથી r_0 સ્થાને વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું સૂત્ર છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે ρ વિદ્યુતભાર ઘનતા ધરાવતા ગોળામાં r_0 અંતરે આવેલાં બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E} = -\rho r_0/3\epsilon_0$ થાય છે.
પરંતુ અહીં વિદ્યુતભાર ઘનતા ρ ને બદલે Q/V વિદ્યુતભાર ઘનતા છે.

$$\therefore \boxed{\langle\vec{E}\rangle = -\frac{Q r_0}{3\epsilon_0 V}}$$

***:→ વિદ્યુત- સ્થિતિમાન :→**

" વિદ્યુત સ્થિતિમાન એટલે કોઈ સંદર્ભબિંદુથી ક્ષેત્રમાં જુદા-જુદા બિંદુઓ પર એકમ ધન વિદ્યુતભારને લઈ જતાં થતુ કાર્ય."



આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે જેના ઊગમબિંદુ પર q જેટલો વિદ્યુતભાર હોય તેવી યામ પદ્ધતિમાં q વડે $\vec{r}$ બિંદુ પાસે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \text{-----}(1)$$

જ્યાં $\hat{r}$ એ $\vec{r}$ ના દિશામાં એકમ સદિશ છે.
હવે, આકૃતિમાં દર્શાવેલ બિંદુ a થી b વચ્ચે રેખા સંકલન કરતાં

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}\, d\vec{l} \quad \text{------}(2)$$

અહીં વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા ગોલીય સંમિતિ ધરાવતી હોવાથી ગોલીય ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિની મદદથી સમી. (2) સરળતાથી ઉકેલી શકાય છે.
આ.જ. કે ગોલીયધ્રુવીય યામ પદ્ધતિમાં, $d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$
$\hat{r}$ ની બંનેબાજુ ડોટ ગુણાકાર લેતાં, $\therefore \hat{r}\cdot d\vec{l} = dr\,\hat{r}\cdot\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{r}\cdot\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{r}\cdot\hat{\phi}$
પરંતુ, $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$, $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = \hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0$, $\therefore \hat{r}\cdot d\vec{l} = dr$
ઉપરોક્ત કિંમત સમી.(2)માં મૂકતાં

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot dr$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}\, dr$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b$$

$$\therefore \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right]$$

$$\therefore \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left[\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b}\right] \quad \text{-----}(3)$$

સમી.(3) સૂચવે છે કે વિદ્યુતક્ષેત્રનું a અને b બિંદુઓ વચ્ચે રેખા સંકલન a અને b બિંદુના સ્થાન પર આધાર રાખે છે. પરંતુ a અને b ને જોડતાં માર્ગ ઉપર આધાર રાખતું નથી. આપણે સમી.(3) જેવું જ પરિણામ બિંદુવત વિદ્યુતભાર ને બદલે વિતરીત થયેલા વિદ્યુતભાર વડે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે મેળવી શકાય છે.

અહીં મળતું રેખા સંકલન $q/4\pi\epsilon_0 r_a$ અને $q/4\pi\epsilon_0 r_b$ ના તફાવત સ્વરૂપે મળે છે. આ તફાવત માર્ગથી સ્વતંત્ર છે. માટે વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એવું સ્થાન વિધેય મળે કે જ્યાં બે બિંદુઓ પરના વિદ્યુતક્ષેત્રના મૂલ્યનો તફાવત તે બે બિંદુઓની વચ્ચેના વિદ્યુતક્ષેત્રના રેખા સંકલન જેટલો હોય.

આવું સ્થાન વિધેય મેળવવા માટે કોઈબિંદુ R ને સંદર્ભબિંદુ તરીકે લઈ R બિંદુ પાસે સ્થાન વિધેયના સાપેક્ષમાં P બિંદુ પાસે આ સ્થાન વિધેયને V(P) વડે દર્શાવતા,

$$V(P) = -\int_R^P \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \text{-----}(4)$$

સમી.(4) વડે મળતું વિધેય V(P) એ P બિંદુપાસે R ના સાપેક્ષમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન કહે છે. હવે ધારોકે R ના સાપેક્ષ બિંદુ a નું સ્થિતિમાન સમી.(4) પરથી.

$$V(a) = -\int_R^a \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \text{------}(5)$$

R ના સાપેક્ષ બિંદુ b નું સ્થિતિમાન $V(b) = -\int_R^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_b^R \vec{E}\cdot d\vec{l}$ -----(6)

સમી.(5) $\cancel{\&}$ (6) પરથી, $V(b) - V(a) = \int_b^R \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_R^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ -----(7)

આમ, $-\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ એ b અને a બિંદુ પાસેનાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત આપે છે.
જો a બિંદુ અનંત અંતરે લેવામાં આવે અને અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લેવામાં આવે તો $V(a) = 0$ થાય.
સમી.(7) પરથી, $V(b) - 0 = -\int_\infty^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ $\therefore V(b) = -\int_\infty^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$

ઊગમબિંદુ પર રહેલ q વિદ્યુતભારને લીધે ઉદ્ભવતું વિ.ક્ષેત્ર $\hat{r}$ ની દિશામાં હશે. આ વિ.ક્ષેત્રમાં એકમ વિ.ભારને અનંત અંતરેથી b બિંદુએ લાવતાં અપાકર્ષી બળ લાગશે. અને $d\vec{l}$ અને $\vec{E}$ ની દિશાઓ વિરુદ્ધ હશે.

સમ. વિ. ભારને અનંત અંતરેથી b બિંદુએ લાવવા તેના પર કાર્ય કરવું પડે. અને આ કાર્ય

$$-\int_\infty^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_\infty^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^b \frac{1}{r^2}dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^b$$

$$\therefore -\int_\infty^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r_b}+\frac{1}{\infty}\right] = -\left[-\frac{1}{r_b}+0\right]\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r_b}$$ થશે.

આ કાર્ય એ b બિંદુ પાસેનું સ્થિતિમાન થશે.

આમ, (1): વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ બિંદુ પાસેનું સ્થિતિમાન એટલેકે એકમ પરીક્ષણ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ લાવતાં થતું કાર્ય. (2): ધનવીજભારને લીધે ઉદ્ભવતાં ક્ષેત્રનું સ્થિતિમાન ધન અને ઋણ વિજભારને લીધે ઉદ્ભવતાં ક્ષેત્રમાં સ્થિતિમાન ઋણ હોય છે.

*: વિદ્યુતક્ષેત્રનો કર્લ :→ આ.જા.કે a અને b બિંદુવચ્ચે વિ.ક્ષેત્રનું રેખાસંકલન

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[q/r_a - q/r_b\right] \text{ ----(A)}$$

ઉપરોક્ત રેખા સંકલન કોઈપણ એક માર્ગ પર લીધેલ છે. હવે જો b થી a ને જોડતા બીજાકોઈ માર્ગ પર $\vec{E}$નું રેખા સંકલન b થી a સુધી લઈએ તો,

$$\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[q/r_b - q/r_a\right] \text{ ----(B)}$$

સમ.(A) અને (B) નો સરવાળો વિ.ક્ષેત્રનું $\vec{E}$નું કોઈ બંધમાર્ગ ઉપર રેખા સંકલન આપે છે.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_a}-\frac{q}{r_b}\right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_b}-\frac{q}{r_a}\right]$$

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ ----(C) જે સંકલનની કિંમત શૂન્ય મળે છે.

સદિશનાં કર્લની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, Curl $\vec{E} = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\Delta a}$ -----(D)

સમ. (C) માંથી $\oint \vec{E}\, d\vec{l}=0$ સમ.(D) માં મૂકતાં $\therefore$ Curl $\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = 0$

આ કિંમત એકજ બિંદુવત વિદ્યુતભાર માટે છે. જો ઘણા વિદ્યુતભારોને લીધે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રો $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \ldots, \vec{E}_n$ હોયતો,

$$\vec{E} = \vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\ldots+\vec{E}_n$$

$\therefore (\nabla\times\vec{E}) = (\nabla\times\vec{E}_1)+(\nabla\times\vec{E}_2)+\ldots+(\nabla\times\vec{E}_n)$ ....(E) $\therefore (\nabla\times\vec{E})=0$

જો કોઈ સદિશનો કર્લ શૂન્ય હોયતો તે સદિશક્ષેત્રને કોઈ અદિશક્ષેત્રનાં ગ્રેડીયન્ટ રૂપે રજૂ કરી શકાય છે. આવું અદિશક્ષેત્ર V વડે દર્શાવતાં,

$\vec{E} = -\nabla V$ ....(F) જ્યાં V એ સ્થિતિમાન વિધેય છે.

આમ, સમ.(F) પરથી જો સ્થિતિમાન વિધેય જાણીતુ હોય તો તે પરથી ક્ષેત્ર શોધી શકાય છે.

Ex:1 : સ્થિરવિદ્યુતના કિસ્સામાં $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ તારવો.

→ સ્થિરવિદ્યુતના કિસ્સામાં $\vec{E} = -\nabla V$

$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot(-\nabla V) = -\nabla^2 V$

પરંતુ $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$

$\therefore -\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$

$\therefore \boxed{\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0}$

ઉપરોક્ત સમ. ને પોઈસનનું સમ. કહે છે.

Ex:2: $\vec{E} = (xy)\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3zx\hat{k}$ એ સ્થિરવિદ્યુતક્ષેત્ર રજૂ કરે છે?

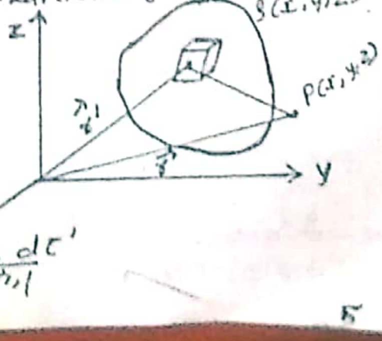
Ans: જો આ સૂત્ર સ્થિરવિદ્યુતક્ષેત્ર રજૂ કરતુ હોયતો તેનો કર્લ શૂન્ય થવો જોઈએ.

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ xy & 2yz & 3zx \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{d}{dy}(3zx)-\frac{d}{dz}(2yz)\right) - \hat{j}\left[\frac{d}{dx}(3zx)-\frac{d}{dz}(xy)\right] + \hat{k}\left[\frac{d}{dx}(2yz)-\frac{d}{dy}(xy)\right]$$

$$= \hat{i}(-2y) - \hat{j}(3z) + \hat{k}(-x) \neq 0$$

માટે, આપેલક્ષેત્ર સ્થિરવિદ્યુતક્ષેત્ર રજૂ કરતું નથી. સ્થિરવિદ્યુતક્ષેત્ર માટે તેનું બંધગાળા પરનું રેખા સંકલન શૂન્ય હોય તેવા ક્ષેત્રોને સંરક્ષી ક્ષેત્રો કહે છે. જે સ્થિરવિદ્યુત માટે $\nabla\times\vec{E}=0$ હોય, તેવા ક્ષેત્રોને irrotational ક્ષેત્રો કહે છે.

*: સતત રીતે પથરાયેલા વિદ્યુતભારને લીધે મળતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન :-

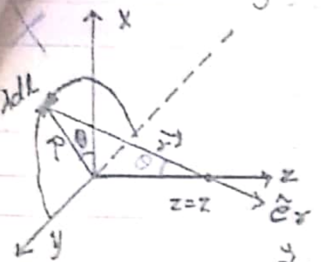


q જેટલા બિંદુવત વિ.ભારથી r અંતરે રહેલા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot q/r$

જો $q_1, q_2, \ldots q_n$ વિદ્યુતભારોથી આપેલા બિંદુના અંતરો અનુક્રમે $r_1, r_2, \ldots r_n$ હોયતો તે બિંદુએ સ્થિતિમાન $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિદ્યુતભાર સતત પથરાયેલ હોયતો $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')\, d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

:→ નિયમીત રેખીય વિદ્યુતભાર ઘનતા λ વાળા વિદ્યુતભારિત R ત્રિજ્યાના અર્ધ-રીંગ વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર રીંગની અક્ષ પર શોધો.



આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે (x,y) સમતલમાં મૂકેલી અર્ધ-રીંગના λdl વિદ્યુતભારાંશને લીધે $z=z$ પાસે ઉદ્‌ભવતું ક્ષેત્ર

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{(R^2+z^2)}\hat{e}_r$$

સમગ્ર અર્ધરીંગને કારણે ઉદ્‌ભવતું ક્ષેત્ર,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{R^2+z^2}\cdot\int R\, d\phi\, \hat{e}_r = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi\, \hat{e}_r$$

પરંતુ $\hat{e}_r = -\hat{e}_x \sin\theta\cos\phi - \hat{e}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{e}_z\cos\theta$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\left[-\hat{e}_x\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\cos\phi\, d\phi - \hat{e}_y\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\sin\phi\, d\phi + \hat{e}_z\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\phi\right]$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\left[-\hat{e}_x\sin\theta[-\sin\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \hat{e}_y\sin\theta[-\cos\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \hat{e}_z\cos\theta[\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right]$$

$$\therefore \vec{E} = \lambda R/4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)\left[-\hat{e}_x\sin\theta(\sin\pi/2-\sin(-\pi/2))\right] - \hat{e}_y\sin\theta[-\cos\pi/2+\cos(-\pi/2)] + \hat{e}_z\cos\theta[\pi/2+\pi/2]$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\left[-\hat{e}_x\sin\theta[1-(-1)] - \hat{e}_y\sin\theta[0-0] + \hat{e}_z\cos\theta\,\pi\right]$$

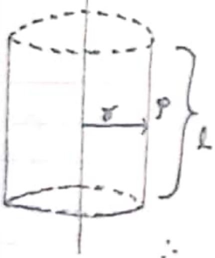
$$\therefore \vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\left[-\hat{e}_x 2\sin\theta + \hat{e}_z\pi\cos\theta\right] = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\left\{-\hat{e}_x\frac{2R}{(R^2+z^2)^{1/2}} + \hat{e}_z\frac{\pi z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right\}$$

આકૃતિ પરથી $\sin\theta = \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$ & $\cos\theta = z/(R^2+z^2)^{1/2}$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\pi\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\left\{-\hat{e}_x\frac{2R}{\pi} + \hat{e}_z z\right\}$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\left\{-\hat{e}_x\frac{2R}{\pi} + \hat{e}_z z\right\}}$$ જ્યાં, $\pi\lambda R = Q$ કુલ વીજભાર.

Ex:→ અનંતલંબાઈની વીજભારીત રેખાની રેખીયવીજભાર ઘનતા λ હોય તો રેખાને લંબ r અંતરે આવેલા બિંદુએ વીજક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E}$ નું મૂલ્ય ગોસનાં નિયમ આધારે મેળવો.



સંમિતતાને લીધે અનંત લંબાઈની વીજભારીત રેખાનું વીજક્ષેત્ર રેખાને લંબ હશે. અને રેખાથી સરખા અંતરે આવેલા બધાંજ બિંદુએ E નું મૂલ્ય સરખું હશે. ગોસીયન પૃષ્ઠ તરીકે r-ત્રિજ્યા અને l લંબાઈનો નળાકાર વીજભારીત રેખાને અક્ષ તરીકે લઈએ. આ ગોસીયન સપાટી પર ગોસનો નિયમ લગાડતાં, $\oint E.da = q/\epsilon_0$, જ્યાં q = નળાકારની અંદર રહેલ વીજભાર

$\therefore \oint E.da = \int E.da$ (નળાકારની વક્રસપાટી) $+ \int E.da$ (નળાકારની ઉપર અને નીચેની સમતલ સપાટી)

ઉપરનાં સમી.નું બીજુ પદ $\int E\, da = 0$ (નળાકારની ઉપર નીચેની સમતલ સપાટી)

[કારણકે તે સમતલના ક્ષેત્રફળ E સાથે 90° ખૂણો બનાવશે. $\therefore E\cdot da = E\, da\cos\theta = E\, da\cos 90 = 0$]

વક્ર સપાટીમાટે દરેક બિંદુએ E બાજુને લંબ (ક્ષેત્રફળ સદિશને સમાંતર) રહી સમાન છે.

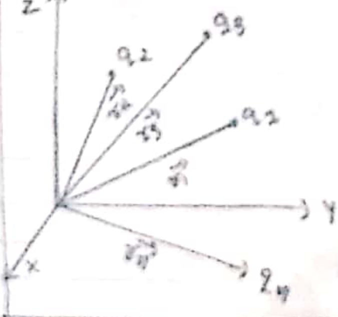
$\therefore \int E da = \int E\, da\, \cos\theta = \int E\, da\, \cos 0$ $[\because \cos 0 = 1]$

$\therefore \int E da = \int E da = E\int da = E$ (વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ) $= E(2\pi r l)$

$\therefore \int E\cdot da = \int E da = 2\pi r l\cdot E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$

$\therefore E\cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$ $\qquad \therefore \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\cdot r}}$

*:→ સ્થિર વિદ્યુત-ઊર્જા :→



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$ વિદ્યુતભારો છે. જેમનાં સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \ldots \vec{r}_n$ છે.

શરૂઆતમાં તંત્રમાં કોઈપણ વિદ્યુતભાર નથી. પરંતુ q_1 વીજભારને અનંત અંતરેથી $\vec{r}_1$ સ્થાને લાવતાં કોઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી. કારણકે શરૂઆતમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે.

હવે જ્યારે q_1 એ $\vec{r}_1$ સ્થાને હોય ત્યારે અનંત અંતરેથી બીજા વિદ્યુતભારને $\vec{r}_2$ સ્થાને લાવતાં (q_1 નું વિદ્યુતક્ષેત્ર હાજર હોવાથી) કાર્ય કરવું પડશે.

નું q_1 ને લીધે $\vec{r_2}$ બિંદુ પાસે સ્થિતમાન $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{12}}$ થશે., જ્યાં $\vec{r_{12}} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$

ક્રમ વિદ્યુતભારને બદલે q_2 વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી $\vec{r_2}$ સ્થાને લાવતાં કરવું પડતું કાર્ય $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ જેટલું થશે.

આમ, થયેલ કાર્ય જેટલી ઊર્જા q_1 અને q_2 વિદ્યુતભારથી બનતા તંત્રમાં સંગ્રહાય છે. આ સ્થિતિઊર્જાને બે વિદ્યુતભારોથી બનતા તંત્રની સ્થિર-વિદ્યુત તંત્રની ઊર્જા કહે છે.

હવે q_1 અને q_2 ને $\vec{r_1}$ અને $\vec{r_2}$ પાસે મૂક્યા પછી q_3 વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી $\vec{r_3}$ સુધી લાવતાં કરવું પડતું કાર્ય $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{\vec{r_{13}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{\vec{r_{23}}}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right]$$

આમ, q_1, q_2, q_3 વિદ્યુતભારના તંત્રની વિદ્યુતઊર્જા $(W_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right]$

આજ પ્રમાણે n વિદ્યુતભારોનું તંત્રની સ્થિર વિદ્યુતઊર્જા,

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \dots + \frac{q_1 q_n}{r_{1n}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \dots + \frac{q_2 q_n}{r_{2n}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} + \frac{q_3 q_5}{r_{35}} + \dots + \frac{q_3 q_n}{r_{3n}} + \dots + \frac{q_{n-1} q_n}{r_{n-1,n}} \right]$$

$\therefore W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$, અહીં $j > i$ હોવાથી કોઈ જોડકા વચ્ચેની આંતરક્રિયા બેવાર આવતી નથી. જો $i \neq j$ ના બધાંજ મૂલ્યો (1 થી n સુધી) લેવાં હોય તો તેવા સરવાળાને છેવટે બે વડે ભાગવો જોઈએ.

$$\therefore W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i q_j / r_{ij}$$

ઉપરના સમી. માં $i = j$ તો નજ લેવું જોઈએ નહિ તો કણ પોતાની સાથેજ કુલંબ બળથી આંતરક્રિયા કરે છે તેવું થઈ જાય.

$$\therefore W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}} \right] \text{ ---- } A$$

ઉપરના સમી. માં $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}}$ પદ એ q_i સિવાયનાં બધાંજ વિદ્યુતભારોને લીધે $\vec{r_i}$ પાસે ઉદ્ભવતું સ્થિતમાન દર્શાવે છે.

$\therefore \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}} \right] = V(\vec{r_i})$ થશે. ------ B , જ્યાં $V(\vec{r_i}) = \vec{r_i}$ બિંદુએ સ્થિતમાન.

જો સમી. (B) ને q_i વડે ગુણીએ તો q_i વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી $\vec{r_i}$ સ્થાને લાવતાં થતું કાર્ય મળે છે. અને આ કાર્યનો i પર સરવાળો કરીએ તો સમગ્ર તંત્રને રચવા જરૂરી કાર્ય એટલે કે તંત્રની સ્થિર વિદ્યુતઊર્જા મળે.

$\therefore W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r_i})$, જો વિદ્યુતભારની વહેંચણી સતત હોય તો $q_i = \rho\, d\tau$ થશે.

$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{2} \int \rho V(\vec{r})\, d\tau} \text{ ----}$$

Ex: સ્થિર-વિદ્યુત ઊર્જાને વિદ્યુતક્ષેત્રનાં સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

:→ $W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$, આપણે જાણીએ છીએ કે $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

$$\therefore \rho = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E})$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) V d\tau$$

પરંતુ $\nabla \cdot (\vec{E} V) = (\nabla \cdot \vec{E}) V + \vec{E} \cdot (\nabla V)$

$$\therefore (\nabla \cdot \vec{E}) V = \nabla \cdot (\vec{E} V) - \vec{E} \cdot (\nabla V)$$

પરંતુ $\vec{E} = -\nabla V$ $\qquad \therefore (\nabla \cdot \vec{E}) V = \nabla \cdot (\vec{E} V) - \vec{E} \cdot (-\vec{E})$

$\therefore (\nabla \cdot \vec{E}) V = \nabla \cdot (\vec{E} V) + E^2$, આ કિંમત W ના સમી.માં મૂકતાં

$$\therefore W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int [\nabla \cdot (\vec{E} V) + E^2]\, d\tau$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \nabla \cdot (\vec{E} V)\, d\tau + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$$

ઉપરોક્ત સમી.ના પ્રથમપદમાં ગોસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint (\vec{E} V) da + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$ ----(A) $\qquad \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \nabla \cdot (\vec{E} V) d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint \vec{E} V da \text{ જુઓ} \right\}$

ઉપરોક્ત સમી. (A) સ્થિરવિદ્યુતઊર્જા વિદ્યુતક્ષેત્રનાં સ્વરૂપમાં મળે છે.

જો અનંત ત્રિજ્યાના ગોળા પર સંકલન લઈએ તો ગોળાની સપાટી પર $\vec{E} V = 0$ થાય. કારણ કે અનંત અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય થશે.

માટે, $W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int E^2 d\tau = \int (\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2) d\tau$ થશે.

Ex :→ R- ત્રિજ્યાની અને સમાન વિદ્યુતપૂરક ધરાવતા ગોળાની q વિદ્યુતભારવાળી ગોળાકાર કવચની વિદ્યુતસ્થિતિ ઊર્જા ગણો.

→ $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$ (સમગ્ર અનંત અવકાશ પર)

હવે ગોળાકાર વિદ્યુતભાર કવચની અંદરના ભાગમાં $\vec{E} = 0$

જ્યારે બહારના ભાગમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q/r^2$

$$\therefore W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{q^2}{r^4} \cdot r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\therefore W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{q^2}{r^2} dr \quad , \text{જ્યાં } d\tau = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$\therefore W = \frac{\epsilon_0}{2} [\phi]_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} \int \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{q^2}{r^2} dr.$$

$$\therefore W = \frac{\epsilon_0}{2} [2\pi - 0] [-\cos\pi + \cos 0] \int \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{q^2}{r^2} dr$$

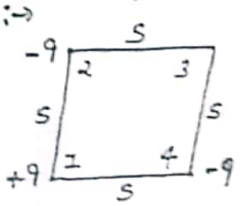
$$\therefore W = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 \int \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{q^2}{r^2} dr$$

$$\therefore W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R}\right]$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}}$$

Ex: નીચેની આકૃતિમાં વિદ્યુતભારોની ગોઠવણી દર્શાવેલ છે. હવે અનંતે રહેલા ખૂણા પર q વિદ્યુતભાર લાવવા માટે કેટલું કાર્ય કરવું પડશે? બધા જ વિદ્યુતભારો (ચારેય) આ રીતે ભેગા કરતાં કેટલું કાર્ય કરવું પડશે.

:→



આપેલ આકૃતિમાં ખૂણો-૩ ખાલી છે. બાકીના ત્રણ વિદ્યુતભારોને લીધે ખાલી ખૂણા પરનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} s}$$

માટે ખાલી ખૂણા પર q વિદ્યુતભારને લાવતાં કરવું પડતું કાર્ય,

$$W_4 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} s} = -\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 s} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} s}$$

$$\therefore \boxed{W_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2}{s} + \frac{1}{\sqrt{2} s}\right]}$$

હવે વિદ્યુતભારો હોય તે વખતની ઊર્જા

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j>i}^{4} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

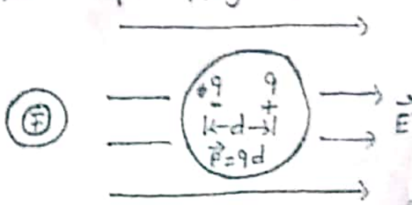
$$\therefore W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right]$$

પરંતુ $q_1 = q$, $q_2 = -q$, $q_3 = q$, $q_4 = -q$, અને $r_{12} = s$, $r_{14} = s$, $r_{23} = s$, $r_{34} = s$ અને પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર $r_{13} = \sqrt{2} s$, $r_{24} = \sqrt{2} s$ થશે.

$$\therefore W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{q^2}{s} + \frac{q^2}{\sqrt{2} s} + -\frac{q^2}{s} - \frac{q^2}{s} + \frac{q^2}{\sqrt{2} s} + -\frac{q^2}{s}\right]$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{4q^2}{s} + \frac{2q^2}{\sqrt{2} s}\right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s} \left[-4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s} \left[\sqrt{2} - 4\right]}$$

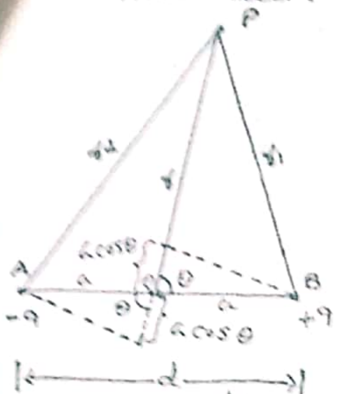
* :→ વીજ દ્વિધ્રુવી :→



સામાન્ય સંજોગોમાં પરમાણુઓ અને અણુઓ વિદ્યુતીય રીતે તટસ્થ હોય છે. તેમના ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારના કેન્દ્રો એકબીજા ઉપર સંપાત થયેલા હોય છે. પરંતુ જ્યારે તેમને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે છે. ત્યારે ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારો પર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રને લીધે બળ લાગે છે. અને તે બંને વિદ્યુતભારો ઉપર બળ વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે. આથી ઋણ અને ધન વિદ્યુતભારો એકબીજાથી દૂર ખસે છે. આમ "બે સરખાં પરંતુ વિજાતીય બિંદુવત વિદ્યુતભારોને એકબીજાથી અમુક અંતરે મૂકતાં બનતી રચનાને વિદ્યુત દ્વિધ્રુવી કહેવામાં આવે છે."

જો +q અને −q વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર d હોય તો આ વિદ્યુતદ્વિ-ધ્રુવીની ચાકમાત્રા qd = (વિદ્યુતભાર × અંતર) થાય છે. તેની દિશા −q થી +q ની દિશામાં હોય છે.

***:→ વિદ્યુત દ્વિ-ધ્રુવીના કેન્દ્રથી r અંતરે આવેલા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન :→**



જ્યાં $a = d/2$

A બિંદુએ −q અને B બિંદુએ +q વિદ્યુતભારને d અંતરે મૂકી દ્વિ-ધ્રુવી રચેલ છે. O એ AB નું મધ્યબિંદુ છે માટે $OA = OB = a$ કે $a = d/2$ થશે. અને $OP = r$, $AP = r_2$, $BP = r_1$ છે.

P બિંદુએ વિદ્યુતભાર +q ને લીધે

વિદ્યુતસ્થિતિમાન $= V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot q/r_1$

તથા −q વિદ્યુતભારને લીધે વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V_2 = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r_2}$

આમ, P બિંદુએ કુલ સ્થિતિમાન,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) \text{ --- (1)}$$

આકૃતિ પરથી $r_1 = r - a\cos\theta$, $r_2 = r + a\cos\theta$.

જ્યાં θ એ r અને દ્વિ-ધ્રુવીની અક્ષ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

આ કિંમતો સમી.(1) માં મૂકતાં,

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r - a\cos\theta} - \frac{q}{r + a\cos\theta}\right]$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q(r + a\cos\theta) - q(r - a\cos\theta)}{(r - a\cos\theta)(r + a\cos\theta)}\right]$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{qr + qa\cos\theta - qr + qa\cos\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2qa\cos\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta}\right]$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2qa\cos\theta}{r^2}\right]$$

, કારણ કે $r >> a$ હોવાથી r^2 ના પ્રમાણમાં $a^2\cos^2\theta$ અવગણી શકાય.

હવે, $a = d/2$ ∴ $d = 2a$ થશે. માટે $2qa = qd = P$ = દ્વિ-ધ્રુવીની ચાકમાત્રા.

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P\cos\theta}{r^2} \text{ ---- (A)}$$

r વડે ગુણતા અને ભાગતાં $\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Pr\cos\theta}{r^3}$ --- (1)

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} \text{ ---- (2)}$$

અહીં દ્વિ-ધ્રુવીના કેન્દ્ર O પર ધ્રુવીય પદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ લઈએ અને −q થી +q ને જોડતી રેખા Z અક્ષ તરીકે લઈએ તથા P, q અને −q એક જ સમતલમાં લઈએ તો P માટે ધ્રુવીય પદ્ધતિ $(\vec{r}, \theta)$ લઈ શકાય અહીં Z-અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિતિ મળતી હોવાથી સમગ્ર આકૃતિને Z- અક્ષની ફરતે ભ્રમણ કરાવતા P જેવાં બિંદુઓનો ગાંતમાંથી નાકક કરીએ તો તે ગાંતમાંથી પરના બધાજ બિંદુઓએ $(\vec{r}, \theta)$ સમાન મળશે.

સમી.(2) ને $(\vec{r}, \theta)$ ધ્રુવીય પદ્ધતિમાં સદિશ સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$V(\vec{r}, \theta) = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\cdot r^3} \text{ ----- (3)}$$

અહીં V એ r અને θ નું વિધેય છે. માટે $(\vec{r}, \theta)$ ધ્રુવીય પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લીધેલ છે.

સમી.(A) પરથી કહી શકાય કે સ્વતંત્ર બિંદુવત વિદ્યુતભારનું સ્થિતિમાન r ના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. જ્યારે દ્વિ-ધ્રુવી માટે તે r^2 ના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. આમ વિદ્યુતદ્વિ-ધ્રુવીનું સ્થિતિમાન r વધતાં ઝડપથી ઘટે છે. સાથે-સાથે સ્થિતિમાન વિદ્યુતદ્વિ-ધ્રુવીની ચાકમાત્રા પર આધાર રાખે છે.

સમી.(1) દર્શાવે છે કે θ = 90 એટલે કે દ્વિ-ધ્રુવીની અક્ષની લંબ આવેલા બિંદુઓએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન cos 90 = 0 હોવાથી V = 0 થશે. આમ, અક્ષ પર દોરેલા લંબ પરનાં કોઈપણ બિંદુએ એકમ વીજભારને લાવતાં કોઈ જ કાર્ય કરવું પડતું નથી.

*** :→ દ્વિ-ધ્રુવીનું વીજક્ષેત્ર :→**

આપણે જાણીએ છીએ કે વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = -\nabla V$ તથા

વિદ્યુતદ્વિ-ધ્રુવીનું સ્થિતિમાન $V(\vec{r}, \theta) = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{P.r\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

પરંતુ $r\cos\theta = z$ $\therefore V = \frac{P.z}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ OR $V(\vec{r}, \theta) = \frac{P.z}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ------ (4)

કાર્તેઝિય ધ્રુવીય પદ્ધતિમાં સમી.(4) પરથી Ex, Ey અને Ez નાં સૂત્રો મેળવવા.

(4) પરથી $E_z = -\frac{dv}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{z}{r^3}\right] = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right] = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3z}{r^4}\frac{dr}{dz}\right]$

પરંતુ $r^2 = x^2+y^2+z^2$ નું z ના સાપેક્ષ વિકલન લેતાં

$2r\,dr/dz = 2z \quad \therefore dr/dz = z/r$ થશે.

$\therefore E_z = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3z}{r^4}\cdot\frac{z}{r}\right] = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3z^2}{r^2} - 1\right]$

પરંતુ $z = r\cos\theta$ હોવાથી $z/r = \cos\theta$

$\therefore z^2/r^2 = \cos^2\theta$ ઉપરોક્ત સમી.માં મૂકતાં $\therefore \boxed{E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[3\cos^2\theta - 1\right]}$ ----(5)

તેજ પ્રમાણે $E_x = -\frac{dv}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right] = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{r^3}\right)$

$E_x = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{-3z}{r^4}\cdot\frac{dr}{dx}$ $\left[\frac{d}{dx} = \frac{d}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}\text{ નો ઉપયોગ}\right]$

પરંતુ $r^2 = x^2+y^2+z^2$ હોવાથી $2r\frac{dr}{dx} = 2x \quad \therefore \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$ થશે.

$\therefore \boxed{E_x = +\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{3zx}{r^5}}$ થશે. -----(6)

તેજરીતે $E_y = -\frac{dv}{dy} = -\frac{d}{dy}\left\{\frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right\} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dy}\left(\frac{z}{r^3}\right)$

$E_y = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{-3z}{r^4}\cdot\frac{dr}{dy}$, પરંતુ $r^2 = x^2+y^2+z^2$ હોવાથી $2r\,dr/dy = 2y \quad \therefore \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$ થશે.

$\therefore \boxed{E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{3zy}{r^5}}$ ----(7)

આ દ્વિ-ધ્રુવી કાર્તેઝિયન યામ-પદ્ધતિમાં મૂકેલા હોય તો તેના માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર E_x, E_y અને E_z ની કિંમત સમી. 7, 6, 5 પરથી મળે છે.

જો ક્ષેત્રને (r, θ, ϕ) ગોલીય ધ્રુવીય યામ-પદ્ધતિમાં દર્શાવેલ હોય તો, E_r, E_θ, E_ϕ ની કિંમત મેળવવી.

આ.જ.ક. $V(r, \theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (સમી.(A) પરથી)

હવે $E_r = -\frac{dv}{dr} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\cos\theta}{r^2}\right] = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{-2\cos\theta}{r^3}$

$\therefore \boxed{E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$ OR $\boxed{E_r = \frac{p\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}}$ ----------(8)

આજરીતે $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta} = -\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right] = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\cdot(-\sin\theta)$

$\therefore \boxed{E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$ -------(9)

આજ પ્રમાણે $E_\phi = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\phi} = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{d}{d\phi}\left\{\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right\} = \frac{-1}{r\sin\theta}\cdot 0$

$\therefore \boxed{E_\phi = 0}$ થશે. -----(10)

આમ, જો (r, θ, ϕ) ગોલીય ધ્રુવી યામ પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લીધેલ હોય અને દ્વિ-ધ્રુવીનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ પર અને અક્ષ z-અક્ષની દિશામાં હોય ત્યારે E_r, E_θ, E_ϕની કિંમતો સમી. 8, 9 અને 10 દર્શાવશે.

આ.જ.ક. $V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ (સમી.(4) પરથી)

પરંતુ $\vec{E} = -\nabla V = -\nabla\left\{\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right\}$

$\therefore \vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\}$ ----(11)

પરંતુ $\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \nabla\{(p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k})\cdot(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\} = \nabla\{p_x x\,\hat{i}\cdot\hat{i} + p_y y\,\hat{j}\cdot\hat{j} + p_z z\,\hat{k}\cdot\hat{k}\}$

$= \nabla(p_x x + p_y y + p_z z) = \left(\frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz}\right)(p_x x + p_y y + p_z z)$

$= \frac{d}{dx}(p_x x + p_y y + p_z z)\hat{i} + \frac{d}{dy}(p_x x + p_y y + p_z z)\hat{j} + \frac{d}{dz}(p_x x + p_y y + p_z z)\hat{k}$

$= p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k} = \vec{p}$ થશે, અર્થાત્ $\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \vec{p}$ -----(12)

અને $\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)\hat{r}$ (કારણ કે θ φ નથી)

$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4}\hat{r} = -\frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{|r|} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$ થશે. $\therefore \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$ ---(13)

સમી.(11) માં સમી.(12) અને (13) ની કિંમતો મૂકતાં.

$$\therefore \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3}\vec{P} + (\vec{P}\cdot\vec{r})\left(-\frac{3\vec{r}}{r^5}\right)\right\} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\vec{P} - \frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^2}\right]$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{P}\right]} \quad \text{-------(14)}$$

Ex:→ એક વિદ્યુત દ્વિ-ધ્રુવની $\vec{P}$ આમ પદ્ધતિનાં ઊગમબિંદુ પર z અક્ષની દિશામાં છે. તો, [a]: (a,0,0) પાસે વહેતા વિદ્યુતભાર પર બળ શોધો. [b]: આ વિદ્યુતભારને (0,0,a) પર મૂકતાં તેના પર લાગતું બળ કેટલું ? [c]: આ વિદ્યુતભારને (a,0,0) થી (0,0,a) સુધી લાવતાં ઉર્જા કાર્ય કેટલું ?

Ans:→ [a]:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{P}\right]$$ પરંતુ, $\vec{r} = (a,0,0)$ $\therefore r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

પ્રમાણે $r = \sqrt{a^2}$ $\therefore r = a$ થશે.

તથા દ્વિ-ધ્રુવ z અક્ષપર મૂકેલ છે. માટે $\vec{P} = (0,0,P)$ થશે. $\therefore P = P$ થશે.

$$\therefore \vec{P}\cdot\vec{r} = (0,0,P)\cdot(a,0,0) = 0$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left[\frac{3(0)}{a^2} - P\hat{k}\right] = \frac{-P}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{k}$$

પરંતુ q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ $\vec{F} = q\vec{E}$ $\quad \therefore \boxed{\vec{F} = -\frac{Pq}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{k}}$

[B]: અહીં $\vec{r} = (0,0,a)$ માટે $r = a$ થશે.

$\vec{P} = (0,0,P)$ માટે $P = P$.

$$\vec{P}\cdot\vec{r} = (0,0,P)\cdot(0,0,a) = Pa$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{P}\right]$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left[\frac{3(Pa)\cdot a}{a^2}\hat{k} - P\hat{k}\right]$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left[3P\hat{k} - P\hat{k}\right]$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left[2P\hat{k}\right]$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 a^3}\cdot\hat{k}$$

q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ $\vec{F} = q\vec{E}$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{qP}{2\pi\epsilon_0 a^3}\hat{k}}$$

[C]: (0,0,a) બિંદુ પાસે સ્થિતિમાન માટે

$\vec{r} = (0,0,a)$ $\therefore r = a$, $\vec{P} = (0,0,P)$ $\therefore P = P$

$\vec{P}\cdot\vec{r} = (0,0,P)\cdot(0,0,a) = Pa$

પરંતુ $V(\vec{r}) = \vec{P}\cdot\vec{r}/4\pi\epsilon_0 r^3 = Pa/4\pi\epsilon_0 a^3$

$$\therefore V(0,0,a) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

પરંતુ (a,0,0) પાસે $\vec{P}\cdot\vec{r} = (0,0,P)\cdot(a,0,0) = 0$

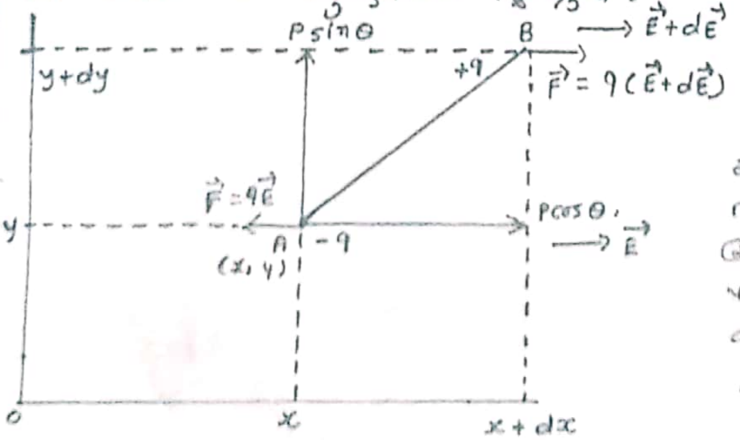
માટે $V(a,0,0) = 0$ થશે.

∴ q વિદ્યુતભારને (a,0,0) થી (0,0,a) પર લાવતાં કરવું પડતું કાર્ય

$$\boxed{W = q\left[\frac{P}{4\pi\epsilon_0 a^2}\right]}$$

થશે.

***:→ અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં દ્વિ-ધ્રુવ :→**



જ્યારે વિદ્યુત દ્વિ-ધ્રુવીને અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે છે. ત્યારે ① સમાન ક્ષેત્રની જેમ ટોર્ક $\tau = \vec{P}\times\vec{E}$ દ્વિ-ધ્રુવીને $\vec{E}$ ની દિશામાં લાવવાનો પ્રયત્ન કરે છે. ② મોટા વીજક્ષેત્રની દિશામાં એક પરિણામી બળ લાગે છે. જે તેને મોટા વીજક્ષેત્રની દિશામાં રેખીય ગતિ આપે છે.

અહીં દ્વિ-ધ્રુવીને xy સમતલમાં લીધેલ છે. $\vec{E}$ ને x ને સમાંતર લઈએ. AB દ્વિ-ધ્રુવીની લંબાઈ dr છે. બિંદુ A નાં સ્થાન (x, y) અને B નાં સ્થાન (x+dx, y+dy) છે. બિંદુ A પર −q અને B પર +q વીજભાર મૂકેલ છે. A બિંદુ પાસે વીજક્ષેત્ર $\vec{E}$ અને B બિંદુપાસે $\vec{E}+d\vec{E}$ x- દિશામાં લાગે છે.

∴ −q પર $q\vec{E}$ બળ −x દિશામાં અને +q પર $q(\vec{E}+d\vec{E})$ બળ x- દિશામાં લાગે છે.

માટે x- દિશામાં લાગતું પરિણામી બળ $F_x = q(\vec{E}+d\vec{E}) - q\vec{E} = qd\vec{E}$

$d\vec{E} = \frac{dE_x}{dx}dx + \frac{dE_x}{dy}dy$ થશે. (કારણકે દ્વિ-ધ્રુવ xy-સમતલમાં છે.)

$\therefore \vec{F_x} = q\left[\frac{dE_x}{dx}dx + \frac{dE_x}{dy}dy\right] = q\cdot dx\frac{dE_x}{dx} + q\,dy\frac{dE_x}{dy}$

$\therefore q\,dx = P_x$

$\therefore \vec{F_x} = P_x\frac{dE_x}{dx} + P_y\frac{dE_x}{dy}$ $\left[\because q\,dr = P\right.$, ઘટકમાં x સમતલ દિશામાં $\left. q\,dy = P_y\right]$

જો આ રીતે બે પરિમાણને બદલે ત્રણ પરિમાણમાં $\vec{F_x}$ લેતાં

$$\therefore \vec{F_x} = P_x\frac{dE_x}{dx} + P_y\frac{dE_x}{dy} + P_z\frac{dE_x}{dz}$$
$$= \left(P_x\,{}^{d}/_{dx} + P_y\,{}^{d}/_{dy} + P_z\,{}^{d}/_{dz}\right)E_x$$
$$= \left(P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\hat{i} + {}^{d}/_{dx}\hat{j} + {}^{d}/_{dz}\hat{k}\right)E_x$$

તે જ પ્રમાણે, $\vec{F_x} = (P\cdot\nabla)E_x$, $\vec{F_y} = (P\cdot\nabla)E_y$, $\vec{E_z} = (P\cdot\nabla)E_z$

હવે, $\vec{F} = \vec{F_x}\hat{i} + \vec{F_y}\hat{j} + \vec{F_z}\hat{k}$ $\therefore \vec{F} = (P\cdot\nabla)E_x\hat{i} + (P\cdot\nabla)E_y\hat{j} + (P\cdot\nabla)E_z\hat{k}$

$$= (P\cdot\nabla)\left[E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}\right]$$

$\therefore$ દ્વિ-ધ્રુવ પર લાગતું બળ $\boxed{\vec{F} = (\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E}}$ ------(A)

અગાઉ જોયું તેમ, $\vec{F_x} = P_x\frac{dE_x}{dx} + P_y\frac{dE_x}{dy} + P_z\frac{dE_x}{dz}$ ------(B)

હવે, Curl $\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ {}^{d}/_{dx} & {}^{d}/_{dy} & {}^{d}/_{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

$\therefore$ Curl $\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = \left(\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz}\right)\hat{i} + \left(\frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx}\right)j + \left(\frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy}\right)k$

પરંતુ $\nabla\times\vec{E} = -\nabla\times\nabla V$, કારણકે $\vec{E} = -\nabla V$

$\therefore \nabla\times\vec{E} = 0$ [કારણકે $\nabla\times\nabla = 0$]

આથી, $\left(\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz}\right)\hat{i} + \left(\frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx}\right)j + \left(\frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy}\right)k = 0$ થશે.

$\therefore i, j, k$ ના સહગુણકો સ્વતંત્ર રીતે શૂન્ય હોવા જોઈએ.

$\boxed{\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{dE_z}{dy} = \frac{dE_y}{dz}}$, $\boxed{\frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dE_x}{dz} = \frac{dE_z}{dx}}$, $\boxed{\frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dE_y}{dx} = \frac{dE_x}{dy}}$

સમી. (B) પરથી $\vec{F_x} = P_x\frac{dE_x}{dx} + P_y\frac{dE_x}{dy} + P_z\frac{dE_x}{dz}$ માં $\frac{dE_x}{dy} = \frac{dE_y}{dx}$ અને

$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dE_z}{dx}$ મૂકતાં, $F_x = P_x\frac{dE_x}{dx} + P_y\cdot\frac{dE_y}{dx} + P_z\frac{dE_z}{dx} = \frac{d}{dx}\left[P_xE_x + P_yE_y + P_zE_z\right]$

$\therefore \vec{F_x} = \frac{d}{dx}\left[(P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k})\cdot(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k})\right] = \frac{d}{dx}(\vec{P}\cdot\vec{E})$

$\therefore \boxed{F_x = \nabla(\vec{P}\cdot\vec{E})}$ થશે.

$$\therefore F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$
$$= {}^{d}/_{dx}(\vec{P}\cdot\vec{E}) + {}^{d}/_{dy}(\vec{P}\cdot\vec{E}) + {}^{d}/_{dz}(\vec{P}\cdot\vec{E})$$
$$= \left({}^{d}/_{dx}\,i + {}^{d}/_{dy}\,j + {}^{d}/_{dz}\,k\right)(\vec{P}\cdot\vec{E})$$

$\therefore \boxed{F = \nabla(\vec{P}\cdot\vec{E})}$ ------(E)

જો Curl $\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = 0$ હોય તો સમી (A) ને (E) બંને સરખી કિંમત આપે છે.

આથી $(\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E} = \nabla(\vec{P}\cdot\vec{E})$

બળ F દ્વિ-ધ્રુવને મોટા ક્ષેત્રની દિશામાં ધકેલવાનું કામ કરે છે. સમાન ક્ષેત્રમાં દ્વિ-ધ્રુવ પર ટોર્ક $\tau = \vec{P}\times\vec{E}$ દ્વિ-ધ્રુવને ક્ષેત્રની સમાંતર ગોઠવવા પ્રયત્ન કરે છે.

(ii) સમીકરણ $\vec{F} = (\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E} = \nabla(\vec{P}\cdot\vec{E})$ અસમાન ક્ષેત્રની દિશામાં ગતિ કરાવે છે.

સ્થિત વિદ્યુત ક્ષેત્ર છે સંરક્ષિત હોવાથી $\vec{F} = -\nabla w$

$\therefore \vec{F} = -\nabla w$ & $F = \nabla(\vec{P}\cdot\vec{E})$ પરથી $w = -\vec{P}\cdot\vec{E} =$ [illegible]

બે વિદ્યુત દ્વિધ્રુવો વચ્ચેની આંતરક્રિયાની સ્થિતિઊર્જા મેળવો.

બે વિદ્યુત દ્વિધ્રુવ P_1 અને P_2 ... અંતરે આવેલી છે. તેમના વચ્ચેની સ્થિતિ-ઊર્જા શોધવી છે. આ વિદ્યુતદ્વિધ્રુવની ચાકમાત્રાઓ અનુક્રમે વિદ્યુત દ્વિધ્રુવનું ... કરવું પડતું કાર્ય.

[illegible] P_1 ની નજીકમાં P_2 ને P_1 થી r અંતરે રહેલા વિદ્યુતક્ષેત્ર ... P_1 અને P_2 ના દ્વિધ્રુવ આઘૂર્ણ અનુક્રમે $\vec{P_1}$ અને $\vec{P_2}$ છે. તેથી સ્થિતિ ઊર્જા $W = -\vec{P_2}\cdot\vec{E_1}$

જ્યાં $\vec{E_1}$ = P_2 ના સ્થાન પર P_1 નું વિદ્યુતક્ષેત્ર. પરંતુ $E_1 = -\nabla V_1$, P_2 ના સ્થાન પર P_1 નું સ્થિતિમાન

અહીં $V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{P_1}\cdot\vec{r}}{r^3}$

$$\vec{E_1} = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{P_1}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\therefore \vec{E_1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\nabla\cdot(\vec{P_1}\cdot\vec{r}) + (\vec{P_1}\cdot\vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

પરંતુ $\nabla\cdot(\vec{P_1}\cdot\vec{r}) = \vec{P_1}$ થશે. [∵ અચળ સદિશ હોવાથી]

$$\therefore \vec{E_1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{P_1}}{r^3} - \frac{3(\vec{P_1}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^5}\right] = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{P_1}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{P_1}\right]$$

હવે સ્થિતિ ઊર્જા $W = -\vec{P_2}\cdot\vec{E_1}$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{P_2}\cdot\left[\frac{3(\vec{P_1}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^2} - \vec{P_1}\right]$$

$$\therefore W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\vec{P_2}\cdot\vec{P_1} - \frac{3(\vec{P_1}\cdot\vec{r})(\vec{P_2}\cdot\vec{r})}{r^2}\right]$$

આમ W ને વિદ્યુત દ્વિધ્રુવ વચ્ચેની આંતરક્રિયા ઊર્જા કે સ્થિતિ ઊર્જા કહેવાય છે.

Que:- વિદ્યુત દ્વિધ્રુવ સ્તર પર નોંધ લખો.

Ans:-

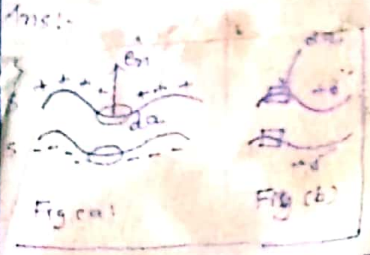


Fig (a) Fig (b)

બે સમાંતર પરંતુ સમાન મૂલ્યના વિજભાર ધરાવતા સ્તર એકબીજાથી સૂક્ષ્મ અંતરે આવેલ હોયતો તેને રચનાને વિદ્યુતદ્વિધ્રુવ સ્તર કહે છે.

જો આવા સ્તરો ઉપર વિજભારની પૃષ્ઠ ઘનતા $\sigma(r')$ અને બંને સ્તરો વચ્ચેનું સૂક્ષ્મ અંતર d હોયતો $D(r') = \sigma(r')d$

જ્યાં $D(r')$ = સપાટીની સ્તર શક્તિ.

આકૃતિ (b) માં બે સ્તરના સ્થાનિક વિભાગો દર્શાવેલા છે. અહીં ઉપરના સ્તરપર $+\sigma da$ અને નીચેના સ્તર પર $-\sigma da$ વિજભાર d અંતરે રહેલા છે. માટે

વિદ્યુત ચાકમાત્રા $P = (\sigma da)d = \sigma d\, da = D\, da$ ....(1)

બે સ્તરોને એકબીજાની પાસપાસે રહેલી અનેક દ્વિધ્રુવોની બનેલી ગણાય. સમીકરણ (1) માં $\vec{P}$ ની દિશા $d\vec{a}$ ક્ષેત્રફળને લંબરૂપે છે. $\therefore \vec{P} = D\, d\vec{a}$ ....(2)

આ વિદ્યુત દ્વિધ્રુવના આઘૂર્ણને $\vec{r}$ સ્થાન સદિશ ધરાવતા બિંદુએ સ્થિતિમાન

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{D\, d\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \text{ ....(3)} \quad \text{જ્યાં } \vec{P} = D\, d\vec{a}$$

આમ સમગ્ર દ્વિધ્રુવ સ્તરને લીધે ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D\frac{d\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \text{ ....(4)}$$

પરંતુ $d\vec{a}$ ક્ષેત્રફળ ખંડ વડે $\vec{r}$ સ્થાન સદિશ ધરાવતા બિંદુએ રચાતો ઘનકોણ $d\Omega$ થશે. $\therefore d\Omega = \frac{da\cos\theta}{r^2} = \frac{d\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$ ....(5)

સમી (5) ની કિંમત સમી (4) માં મૂકતાં $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D\, d\Omega = \frac{D}{4\pi\epsilon_0}\int d\Omega$ જ્યાં $\int d\Omega$ = સમગ્ર સ્તર વડે $\vec{r}$ સ્થાન સદિશવાળા બિંદુએ રચાતો ઘનકોણ

QUE:- વિદ્યુત ચતુર્ધ્રુવી એટલે શું ?

Ans:- બે વિદ્યુત દ્વિધ્રુવને પાસપાસે જોડતાં બનતી રચનાને વિદ્યુતચતુર્ધ્રુવી કહે છે. જે બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે