Q:1 એક પરિમાણમાં મુક્ત રીતે ગતિ કરતા કણ માટે શ્રોડિન્જરનું સમી. મેળવો અને દર્શાવો કે શ્રોડિન્જરસમીના ઉકેલનું સ્વરૂપ તરંગ પેકેટ જેવું જ છે.

→ એક પરિમાણમાં m દળ અને p વેગમાન ધરાવતો એક કણ વિચારો. જે ફક્ત ગતિઊર્જા $E = \frac{p^2}{2m}$ ધરાવતો હશે. અને કોઈ પણ સમયે $x = -\infty$ થી $x = +\infty$ વચ્ચે X-અક્ષની દિશામાં હશે. આ સ્થાન પર એટલે કે $-\infty \leq x \leq +\infty$ માં કણને રહેવાની સંભાવના એકસરખી હશે. આ કણ માટે દી-બ્રોગ્લીના કણ તરંગ સંવાદ પ્રમાણે $p = h/\lambda$ ~~પ્ર~~ ~~સંબંધ~~ મળશે.

$$\therefore p = \frac{h}{2\pi} \times \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore \boxed{p = \hbar \cdot k}$$

જ્યાં, p આપેલ કણના વેગમાન અને $\hbar$ એ પ્લાન્કનો અચળાંક છે. તથા $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ તરંગસંખ્યા છે.

આ જ પ્રમાણે પ્લાન્કના સૂત્ર પરથી,

$$\boxed{E = \hbar \omega}$$

જ્યાં, E = કણની શક્તિ

$\hbar$ = પ્લાન્કનો અચળાંક

ω = કોણીય આવૃત્તિ

→ મુક્ત કણને sin અને cos જેવા હાર્મોનિક તરંગો વડે દર્શાવી શકાય છે.

$$\therefore \psi = A\cos(kx-\omega t)$$

$$\psi = B\sin(kx-\omega t)$$

→ આપણે એવું વિકલ સમી. મેળવવું છે કે જે ઉપરોક્ત બંને વિધેયોના રેખીય સંયોજન સ્વરૂપે મળતા હાર્મોનિક તરંગોને લીધે બનેલું હોય અને તે નીચેની બે શરતોનું પાલન કરતું હોય.

શરત:-1 → મેળવેલ સમી. ના ખાસ ઉકેલો કણની ખાસ સ્થિતિઓ રજૂ કરતાં હોવા જોઈએ. અને તેમનું રેખીય સંયોજન વ્યાપક સ્થિતિઓ દર્શાવતું હોવું જોઈએ.

શરત:-2 → રેખીય વિકલ સમી.માં ગાણિતીય અવસ્થા રજૂ કરતાં ગાણિતીય ચલ આવવા જોઈએ નહિ જો કણ માટે ગાણિતિય ચલ P આવે તો તે સમી. P વેગમાનવાળા કણ માટે જ છે તેમ કહી શકાય.

આપેલ વિધેયો પરથી તેમનું રેખીય સંયોજન નીચે પ્રમાણે થશે.

$$\psi = A\cos(kx-\omega t) + B\sin(kx-\omega t)$$

Scanned with CamScanner

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega A \sin(kx-\omega t) - \omega B \cos(kx-\omega t)$$

અને

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -kA \sin(kx-\omega t) + kB \cos(kx-\omega t)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2A \cos(kx-\omega t) - k^2B \sin(kx-\omega t)$$

ઉપરોક્ત સમી. પરથી,

$$\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} = \frac{\omega[A \sin(kx-\omega t) - B \cos(kx-\omega t)]}{-k^2[A \cos(kx-\omega t) + B \sin(kx-\omega t)]}$$

→ sin અને cos વિધેયો એકબીજાથી રેખીય રીતે સ્વતંત્ર હોવાથી $A \sin(kx-\omega t) - B \cos(kx-\omega t) = \alpha \cdot [A \cos(kx-\omega t) + B \sin(kx-\omega t)]$ લખાય.

→ ઉપરોક્ત સમી. ની બંને બાજુના sin અને cos ના સહગુણકોને સરખાવતાં,

$$\boxed{A = \alpha \cdot B} \longrightarrow (A)$$

અને

$$\boxed{-B = \alpha \cdot A} \longrightarrow (B)$$

સમી. (A) અને (B) નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{-A}{B} = \frac{\cancel{\alpha} B}{\cancel{\alpha} A} \Leftrightarrow B^2 = -A^2$$

$$\therefore \boxed{B = \pm iA} \longrightarrow (C)$$

→ સમી. (1) માં $B = iA$ મૂકતાં,

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} = \frac{\omega\left[A \sin(kx-\omega t) - iA\cos(kx-\omega t)\right]}{-k^2\left[A\cos(kx-\omega t) + iA\sin(kx-\omega t)\right]}$$

→ ઉપરોક્ત સમી.ને i વડે ગુણતા અને ભાગતાં,

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} = \frac{i\omega\left[A \sin(kx-\omega t) - iA\cos(kx-\omega t)\right]}{k^2\left[-iA\cos(kx-\omega t) - i^2 A\sin(kx-\omega t)\right]}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi/\partial t}{\partial^2 \psi/\partial x^2} = \frac{i\omega\left[A \sin(kx-\omega t) - iA\cos(kx-\omega t)\right]}{k^2\left[-iA\cos(kx-\omega t) + A\sin(kx-\omega t)\right]}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi/\partial t}{\partial^2 \psi/\partial x^2} = \frac{i\omega}{k^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\omega}{k^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

→ હવે ઉપરોક્ત સમી.ને $\hbar^2$ વડે ગુણતાં, અને ભાગતાં

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar\,(\hbar\omega)}{\hbar^2 k^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

→ હવે, આ સમી. માં $\hbar\omega = E$ અને $p = \hbar k$ લેતાં,

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar \cdot E}{p^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

હવે, $E = \frac{p^2}{2m}$ મૂકતાં,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{p^2} \cdot \frac{p^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

→ ઉપરોક્ત સમી. ને બંને બાજુ $i\hbar$ વડે ગુણતાં,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i^2 \hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\therefore \boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$$

→ ઉપરોક્ત સમી. એક પરિમાણમાં મુક્ત કણ માટે શ્રોડિન્જર સમી. છે.

* શ્રોડિન્જર સમી. ની લાક્ષણિકતાઓ :-

(1) શ્રોડિન્જર સમી. એ દ્વિતીય ક્રમનું વિકલ સમી.

છે. જેનો ઉકેલ,

$$\psi = \int A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}$$ છે.

તરંગ પેકેટ પણ ઉપરોક્ત સમી,

$$\psi = \int A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}$$ જેવું સ્વરૂપ ધરાવે છે.

જેથી કહી શકાય કે શ્રોડિન્જર સમી.ના ઉકેલ એ તરંગ પેકેટ જેવું સ્વરૂપ દર્શાવે છે.

(2) શ્રોડિન્જર સમી. માં i સંકર સંખ્યા આવે છે. જેથી કહી શકાય કે શ્રોડિન્જર સમી. એ સંકર વિધેયો ધરાવતાં, હાર્મોનિક તરંગોનું બનેલું છે. જે i આવવાથી પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રથી જુદું પડે છે.

Que-2

ત્રિ-પરિમાણમાં મુક્ત કણ માટે શ્રોડિન્જરનું સમી. મેળવો.

⇒ એક પરિમાણમાં તરંગવિધેય $\psi(x,t)$ ને બદલે ત્રિપરિમાણમાં તરંગવિધેય $\psi(\vec{r},t)$ લેતાં,

$$\psi(\vec{r},t) = A(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$ થશે.

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega A(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \longrightarrow (A)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ikA(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = -k^2 A(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \longrightarrow (B)$$

પરંતુ સ્થાન સદિશ $\vec{r} = \vec{r}\,(x, y, z)$ થશે.

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \text{ (નબલા)}$$

= લાપ્લાશિયન ઓપરેટર

હવે સમી. (B) પરથી,

$$\nabla^2\psi = -k^2 A(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \longrightarrow (C)$$

→ સમી (A) અને (C) પરથી,

$$\frac{\partial\psi/\partial t}{\nabla^2\psi} = \frac{-i\omega A(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}{-k^2 A(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$$

$$\therefore \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\omega}{k^2}\cdot\nabla^2\psi$$

→ ઉપરોક્ત સમી. ને $\hbar^2$ વડે ગુણતા અને ભાગતા

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar(\hbar\omega)}{\hbar^2 k^2}\nabla^2\psi$$

$$\therefore \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar E}{p^2}\cdot\nabla^2\psi$$

→ ઉપરોક્ત સમી. માં $E = \hbar\omega$ અને $p = \hbar\cdot k$ મૂકેલ છે.

હવે, $E = p^2/2m$ મૂકતાં,

Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar \cdot p^2}{p^2 \cdot 2m} \cdot \nabla^2\psi$$

$$\therefore \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\psi$$

ઉપરોક્ત સમી.ને બંને બાજુ $i\hbar$ વડે ગુણતાં,

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i^2\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2\psi$$

$$\therefore i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2\psi$$

$$\therefore \boxed{i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]}$$

Que-3

ઓપરેટર અનુરૂપતા મેળવો. અને તેનો ઉપયોગ કરી બળક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા કણ માટેનું ત્રિ-પારિમાણિક શ્રોડિન્જરનું સમી. મેળવો.

⇒ ત્રિ-પરિમાણમાં મુક્ત કણ માટેનું શ્રોડિન્જર સમી.,

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi \quad \text{---} (1)$$

→ આ સમી.ની ડાબી બાજુ $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ને અને જમણી બાજુ $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ ને ઓપરેટર કહી શકાય. કે જે તરંગવિધેય

$\psi(r,t)$ ઉપર લગાડેલ છે.

→ સમી. (1) પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રના સમી. જેવું જ છે. જે નીચે પ્રમાણે છે.

$$\boxed{\text{ગતિઊર્જા} = E = \frac{p^2}{2m}} \longrightarrow (2)$$

→ ઉપરોક્ત સમી. માં શક્તિ $\boxed{E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}}$ $\longrightarrow$ ③ અને $\boxed{p = -i\hbar\nabla}$ $\longrightarrow$ ④ છે.

$$p^2 = p\cdot p = (-i\hbar\nabla)(-i\hbar\nabla)$$
$$= i^2\hbar^2\nabla^2$$
$$= -\hbar^2\nabla^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{p^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2} \longrightarrow ⑤$$

→ સમી. ③ અને ⑤ નો ઉપયોગ સમી. ② માં કરતાં,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

હવે આ સમી. ને તરંગવિધેય ψ પર લગાડતાં,

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi} \longrightarrow (6)$$

→ આમ, યોગ્ય ઓપરેટરનો ઉપયોગ કરી પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રના સમી. પરથી ક્વૉન્ટમ ભૌતિકશાસ્ત્રના સમી. પર જઈ શકાય છે.

આમ, પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રના E અને p અનુક્રમે ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રના ઓપરેટરો $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ અને $-i\hbar\nabla$ ને અનુરૂપ છે.

⇒ જ્યારે કણ પર બળ લાગતું હોય છે ત્યારે પણ ઓપરેટર અનુરૂપતા જળવાઈ રહે છે. ધારો કે કણ પર $F(\vec{r}, t)$ બળ લાગે છે.

$\therefore$ બળ $\vec{F}$ = − (સ્થિતિઊર્જાનું યામોની સાપેક્ષમાં વિકલન)

$$\therefore F = -\nabla \cdot V(\vec{r}, t)$$

જ્યાં, $V(\vec{r}, t)$ એ કણની r સ્થાને અને t સમયે સ્થિતિઊર્જા છે.

અને $F(\vec{r}, t)$ એ r સ્થાને, t સમયે કણ પર લાગતું બળ છે.

→ ધારો કે કણની યાંત્રિક ઊર્જા E હોય તો,

E = સ્થિતિઊર્જા + ગતિઊર્જા

$$\therefore \boxed{E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t)} \longrightarrow (7)$$

− આ સમી. માં $p = -i\hbar\nabla$ અને $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ઓપરેટર મૂકતાં,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}, t)$$

બંને બાજુએ $\psi(\vec{r}, t)$ પર લાગુ પાડતા,

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r}, t) \cdot \psi(\vec{r}, t)}$$

$\longrightarrow$ (8)

→ આ સમી. બળક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા કણ માટેનું ત્રિ-પારિમાણિક શ્રોડિંજર સમીકરણ છે.

Que:-4) અપેક્ષા મૂલ્યો એટલે શું? સમજાવો.

⇒ તરંગવિધેયના સંભાવનાત્મક કિંમતના સંદર્ભમાં પ્રાયોગિક પરિણામોની સમાન ધારતા નીચે કણના સ્થાન જુદી જુદી વખતે જુદા જુદા મળે છે. આવા પ્રયોગમાં ધારો કે કોઈ એક કણનું સ્થાન મેળવવાના N અવલોકનો નીચે પ્રમાણે છે. તેમાંથી n_1 વખતે કણ $\vec{r}_1$ પાસે,
n_2 વખતે કણ $\vec{r}_2$ પાસે,
n_3 વખતે કણ $\vec{r}_3$ પાસે, ------
n_n વખતે કણ $\vec{r}_n$ પાસે જોવા મળે છે.

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ --- વગેરે મૂલ્યો અવકાશમાં સતત પથરાયેલાં છે. તેથી કણના સ્થાનનું લાક્ષિત સરેરાશ, $\langle \vec{r} \rangle$ મેળવવામાં આવે છે.

$$\langle \vec{r} \rangle = \frac{n_1\vec{r_1} + n_2\vec{r_2} + \cdots + n_n\vec{r_n}}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n}$$

$$\therefore \langle \vec{r} \rangle = \frac{n_1\vec{r_1} + n_2\vec{r_2} + \cdots + n_n\vec{r_n}}{N}$$

$$\therefore \langle \vec{r} \rangle = \frac{n_1}{N}\vec{r_1} + \frac{n_2}{N}\vec{r_2} + \cdots + \frac{n_n}{N}\vec{r_n}$$

પરંતુ,

$\frac{n_1}{N} = P(\vec{r_1}) =$ કણને $\vec{r_1}$ પર શોધવાની સંભાવના

તે જ પ્રમાણે,

$\frac{n_2}{N} = P(\vec{r_2}) =$ કણને $\vec{r_2}$ પર શોધવાની સંભાવના

$$\therefore \langle \vec{r} \rangle = P(\vec{r_1})\cdot\vec{r_1} + P(\vec{r_2})\cdot\vec{r_2} + \cdots + P(\vec{r_n})\cdot\vec{r_n}$$

- અહીં દુર્વા $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3} \cdots \vec{r_n}$ અવકાશમાં સતત પથરાયેલા હોવાથી આ સરવાળાને સંકલનના સ્વરૂપમાં દર્શાવતાં,

$$\therefore \langle \vec{r} \rangle = \int P(\vec{r})\cdot\vec{r}\cdot d^3r$$

$$\therefore \langle \vec{r} \rangle = \int \psi^*(\vec{r})\cdot\vec{r}\cdot\psi(\vec{r})\, d^3r$$

જ્યાં, ψ^* એ ψ નો complex conjugate છે. જ્યાં $P(\vec{r}) = |\psi|^2$ છે. અહીં $\langle \vec{r} \rangle$ એ સ્થાનયલનું અપેક્ષા-મૂલ્ય છે.

Que: 5 તરંગવિધેયનું ભૌતિકશાસ્ત્રીય અર્થઘટન આપો.

OR

તરંગવિધેયનું સંભાવનાત્મક અર્થઘટન આપો.

Ans :⇒ શ્રોડિન્જર સમી.નો ઉપયોગ કરી તરંગવિધેયના ભૌતિકશાસ્ત્રીય ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે. તે સમજવવા માટે તરંગવિધેય ψ મેળવવામાં આવે છે. આ સમજાવવા માટે ઈલેક્ટ્રોન વિવર્તનની મદદથી ફોટોગ્રાફીક પ્લેટ ઉપર મહત્તમ કે ન્યૂનતમ તીવ્રતા તરંગવિધેયના કંપવિસ્તારની પરિણામી અસર દર્શાવે છે.

→ ધારો કે ઈલેક્ટ્રોન સાથે સંબંધિત તરંગ વિધેયને $\psi(\vec{r},t)$ વડે દર્શાવતા, તે t સમયે જ સ્થાને ઈલેક્ટ્રોનના તરંગવિધેયને રજૂ કરે છે. વિવર્તન માં પડદા પર પ્રાપ્ત થતી તીવ્રતા તે તરંગવિધેયના કંપવિસ્તારના વર્ગની r સ્થાને કિંમતના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$$\therefore \text{તીવ્રતા } I \propto |\psi(\vec{r},t)|^2$$

→ જેમ તીવ્રતા વધુ તેમ તે સ્થાન ઉપર કણને આવવાની સંભાવના વધુ અને જેમ તીવ્રતા ઓછી તેમ કણને તે સ્થાન ઉપર આવવાની સંભાવના ઓછી. એટલે કે,

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = \psi^*(\vec{r},t)\cdot\psi(\vec{r},t)$$

એ કણને r સ્થાને હોવાની સંભાવના દર્શાવે છે.

"એકમ કદમાં કણને શોધવાની સંભાવનાને સંભાવના ઘનતા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે."

→ સંભાવના ઘનતા તરંગવિધેયના નિરપેક્ષ વર્ગ અથવા કે તરંગવિધેય અને તેના complex conjugate ના મદદથી મેળવી શકાય છે.

$$\therefore P(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2$$

$$= \psi^*(\vec{r},t)\cdot\psi(\vec{r},t)$$

જ્યાં $P(\vec{r},t)$ = t સમયે r સ્થાને કણને શોધવાની સંભાવના છે.

$d^3r = dx\cdot dy\cdot dz$ કદખંડમાં કણને શોધવાની સંભાવના

$$P(\vec{r},t)d^3r = |\psi(\vec{r},t)|^2\cdot d^3r$$ છે.

→ સમગ્ર અવકાશમાં કણને શોધવાની સંભાવના 1 થશે. કારણ કે સમગ્ર અવકાશમાં પણ ગમે ત્યાં હાજર હોય જ.

Que-6 તરંગવિધેયનું નોર્મલાઇઝેશન સમજાવો. (પ્રમાણિતકરણ અને નોર્મલાઇઝ્ડ તરંગવિધેયનું સંભાવનાત્મક અર્થઘટન આપો.

⇒ સમગ્ર અવકાશમાં કણને શોધવાની કુલ સંભાવના,

$$\int P(\vec{r}, t)\, d^3r = \int |\psi(\vec{r}, t)|^2\, d^3r = 1 \text{ થશે.}$$

જે શ્રોડિન્જર સમી.નો ગાણિતીય ઉકેલ છે. પરંતુ ગાણિતીય ઉકેલ અને ભૌતિકશાસ્ત્રીય ઉકેલ અનુસંગત હોતા નથી. માટે તેની ભૌતિકશાસ્ત્રીય સંભાવના નીચે પ્રમાણે છે :-

$$\boxed{\int P(\vec{r}, t)\, d^3r = \int |\psi(\vec{r}, t)|^2\, d^3r = N^2} \rightarrow (A)$$

થશે.

જ્યાં, N = તરંગવિધેયનો Norm (નોર્મ) છે.

N^2 = પરિમિત ધન સંખ્યા છે.

સમી. (A) પરથી,

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2\, d^3r = N^2$$

$$\therefore \int \frac{1}{N}\psi(\vec{r}, t) \cdot \frac{1}{N}\psi^*(\vec{r}, t)\, d^3r = 1 \text{ થશે.}$$

જ્યાં, $\frac{1}{N}\psi = \psi'$ અને $\frac{1}{N}\psi^* = \psi'^*$ મૂકતાં,

$$\therefore \int \psi'(\vec{r}, t) \cdot \psi'^*(\vec{r}, t)\, d^3r = 1.$$

* વ્યાખ્યા :- " જો તરંગવિધેયનો નોર્મ 1 હોય તો તે તરંગવિધેયને નોર્મલાઇઝ્ડ (પ્રસામાન્ય) તરંગવિધેય કહે છે.

* **વ્યાખ્યા** :- " જે તરંગવિધેયનો નોર્મ એકમ અથવા 1 ન હોય તો તેવા તરંગવિધેયને નોન નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધેય કહે છે."

અહી આપણે મેળવેલ તરંગવિધેય $\psi(\vec{r},t)$ નું નોર્મ N^2 છે.

$\therefore \psi(\vec{r},t)$ તરંગવિધેય નોન નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધેય છે. જે તરંગવિધેયને $\frac{1}{N}$ વડે ગુણ નવું તરંગવિધેય $\psi'(\vec{r},t)$ મળે છે. જે પણ શ્રોડિન્જર સમી. નો ઉકેલ હોય છે.

આમ, નોન નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધેયને કોઈ પણ સંખ્યા વડે ગુણતા અથવા ભાગતા મળતું નવું તરંગવિધેય એકમ નોર્મ ધરાવે છે. જે નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધેય છે.

આમ, નોન નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધેયને કોઈ પણ સંખ્યા વડે ગુણતા અથવા ભાગતા મળતું નવું તરંગવિધેય નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધે હોય છે.

આ પ્રમાણે, નોન નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધેયને નોર્મલાઈઝ્ડ તરંગવિધેયમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય છે.

Que:7 આપેલ તરંગ માટે સીમા શરત મેળવવી.

⇒ આપણે જોયું છે કે $\psi(\vec{r},t)$ ના નિરપેક્ષ વર્ગનું સમગ્ર અવકાશ પરનું મૂલ્ય N^2 થાય છે.

Scanned with CamScanner

જે માટે $\psi' = \frac{1}{N} \cdot \psi$ મળ્યું. આપણે ψ^2 ના

નિરપેક્ષ વર્ગના સંકલનને જુદા-જુદા બિંદુઓ આગળ સતત સરવાળાનાં રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લઈ શકીશું.

$$|\psi'(x_1)|^2 + |\psi'(x_2)|^2 + |\psi'(x_3)|^2 + \cdots$$

એટલે કે $|\psi'|^2$ ના અવકાશના બિંદુ આગળ સરવાળો.

આ સરવાળો N^2 જેટલો પરિમિત મળે છે. આવું ત્યારે જ શક્ય બને જ્યારે ઉપરોક્ત સમી.નું દરેક પદ પરિમિત હોય. અને જેમ જેમ $x \to \infty$ તેમ તેમ દરેક પદનું મૂલ્ય ઘટતું જાય છે.

$\therefore$ $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \psi'(x) \to 0}$ થાય છે.

આમ, તરંગવિધેય પરિમિત હોવું જોઈએ અને વિધેયના સ્વતંત્ર અવકાશીય ચલ $x \to \pm\infty$ થાય ત્યારે $\psi' \to 0$ થવું જોઈએ.

ઉપરોક્ત શરતને તરંગવિધેયની સીમાશરત કહે છે. અને સીમા શરતનું પાલન કરતા તરંગવિધેયને નોર્મલાઈઝેબલ તરંગવિધેય કહેવામાં આવે છે.

ક્યુ:-8 નોન્-નોર્મલાઈઝેબલ તરંગવિધેયો અને બોક્સ નોર્મલાઈઝેશન સમજાવો.

⇒ આપણે જાણીએ છીએ કે તરંગવિધેયનું નોર્મલાઈઝેશન કરવા માટે તરંગવિધેયના નોર્મની કિંમત વાસ્તવિક સંખ્યા હોવી જોઈએ.

ધારો કે કોઈ કણ માટે તરંગવિધેય
$\psi = a\cdot e^{i(k\cdot r-\omega t)}$ છે.

$\therefore \psi^* = a\cdot e^{-i(k\cdot r-\omega t)}$ થશે.

તરંગવિધેયના નોર્મની કિંમત

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\cdot \psi \, d^3r$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a\cdot e^{-i(k\cdot r-\omega t)}\cdot a\, e^{i(k\cdot r-\omega t)} \, d^3r$$

$$= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^3r$$

$$= a^2\cdot\infty$$

$$= \infty$$

આપેલ તરંગવિધેયનો નોર્મ ∞ હોવાથી તેનું નોર્મલાઈઝેશન કરી શકાય નહિ. આવા

તરંગ વિધેયને નોર્મલાઇઝેબલ તરંગવિધેય કહે છે.

સંભાવનાના અર્થઘટનના દૃષ્ટિબિંદુથી જોતાં r બિંદુ પાસે t સમયે d^3r કદખંડમાં કણને રહેવાની સંભાવના $\psi^* \cdot \psi \, d^3r$ પરથી,

$$= a \cdot e^{-i(k \cdot r - \omega t)} \cdot a e^{i(kr - \omega t)} \, d^3r$$

$$= a^2 \cdot d^3r$$

જો સમગ્ર અવકાશમાં કણને શોધવાની સંભાવના ∞ હોય તો તેવી સ્થિતિમાં ખૂબ જ નાના એવા પરિમિત કદખંડ d^3r માં કણને શોધવાની સંભાવના $a^2 \cdot d^3r$ એ કદના સમપ્રમાણમાં હોવાથી કણને આ કદ સિવાયના સમગ્ર અવકાશમાં શોધવાની સંભાવના લગભગ શૂન્ય થાય છે.

ભૌતિકશાસ્ત્રની દૃષ્ટિએ આવુ થવું શક્ય નથી. આવા અભૌતિક પરિણામો નિવારવા માટે નોનનોર્મલાઇઝેબલ તરંગવિધેયોનું અર્થઘટન જુદી-જુદી બે રીતે કરવામાં આવે છે.

(1) નોન નોર્મલાઇઝેબલ તરંગવિધેયનું અર્થઘટન સંભાવના પરથી બદલીને કણની સંખ્યાના સ્વરૂપમાં લખીએ તો, $\int |\psi^2 d^3r|$ નું અનંત

મૂલ્ય અનંત અવકાશમાં રહેલા અને અકિબીજાથી

સ્વતંત્ર અનંત સંખ્યાના કણોને રજૂ કરે છે. આ દરેક કણનું તરંગવિધેય ψ છે. આથી $\psi^2 d^3r$ એ d^3r કદખંડમાં રહેલા કણની સંખ્યા દર્શાવે છે.

(2) * (પ્રીપ્રસામાન્ય કરણ:-2 (બોક્સનોર્મલાઇઝેશન))

→ બીજી રીતમાં નોન નોર્મલાઇઝેબલ તરંગવિધેય ધરાવતા કણને L લંબાઈ, L પહોળાઈ અને L ઊંચાઈ ધરાવતાં એક મોટા બોક્સમાં રહેલ ધારવામાં આવે છે. અને નોર્મલાઇઝેશન માટેનું સંકલન આ પેટીના કદ પર લેવામાં આવે છે. જે વાસ્તવિક સંખ્યાએ મળે છે. ત્યારબાદ જરૂરી ગણતરીઓમાં આ રીતે મેળવેલ નોર્મલાઇઝ્ડ તરંગવિધેયને ઉપયોગમાં લઈ છેવટ ગણતરીના પરિણામમાં $L \to \infty$ લેવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિ બોક્સ નોર્મલાઇઝેશન તરીકે ઓળખાય છે. દા.ત., તરંગવિધેય

$$\psi(\vec{r}) = e^{i k \cdot r}$$

આ તરંગવિધેયનું બોક્સ નોર્મલાઇઝેશન કરતા

$$\psi^* = e^{-i k \cdot r}$$

$$\therefore \int_{-L/2}^{L/2} \psi^*(\vec{r}) \cdot \psi(\vec{r})\, d^3r$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikr} \cdot e^{ikr} \, d^3r$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} d^3r$$

પરંતુ $d^3r = dx \cdot dy \cdot dz$

$$\therefore \int_{-L/2}^{L/2} dx \cdot \int_{-L/2}^{L/2} dy \cdot \int_{-L/2}^{L/2} dz = L^3 \text{ થશે.}$$

$$\therefore \int |\psi^2 \cdot d^3r| = L^3$$

$$\therefore \int \frac{1}{L^{3/2}} \psi^* \cdot \frac{1}{L^{3/2}} \psi \cdot d^3r = 1$$

$$\therefore \int \psi'^* \cdot \psi' \, d^3r = 1$$

જ્યાં, $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \psi(\vec{r})$ લીધેલ છે.

અર્થાત્ કે,

$$\psi'(\vec{r}) = L^{-3/2} \psi(\vec{r})$$

$$= L^{-3/2} e^{ikr}$$

→ જેને ક્લાઇન-ગોર્ડનના સમીકરણનાં તરંગવિધેય કહેવાય છે.

પ્રશ્ન: 9 ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રમાં સંભાવનાનું (પ્રાયિકતાનું) સંરક્ષણ થાય છે. તેમ સાબિત કરો.

⇒ જો કણનું અવકાશમાં કોઈ પણ સર્જન, નાશ અથવા ક્ષય ન થતો હોય તો તેને સમગ્ર અવકાશમાં શોધવાની સંભાવના,

$$\int \psi^2 \, d^3r = 1 \text{ થશે.}$$

તે પરથી, તેનું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં, $\frac{\partial}{\partial t} \int \psi^2 \, d^3r = 0$ થશે.

અહીં, વિકલન સમયની સાપેક્ષમાં લીધું છે. જ્યારે સંકલન અવકાશીય યામોની સાપેક્ષમાં લીધેલ છે. માટે, વિકલન અને સંકલન એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે. પરિણામે, વિકલનને સંકલનની અંદર લઈ શકાય છે.

$$\therefore \int \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) \, d^3r \text{ થશે.}$$

$$\therefore \int \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] d^3r \quad \rightarrow (1)$$

પરંતુ બળક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા કણ માટે,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \cdot \psi$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = (i\hbar)^{-1} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \right]$$

અને આ પરથી,

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = (-i\hbar)^{-1} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \cdot \psi^* \right]$$

$$\therefore \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = (i\hbar)^{-1} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* - V \cdot \psi^* \right]$$

હવે, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ અને $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ ની આ કિંમતો સમી. ① માં

મૂકતાં,

$$= \int \left[\psi \, (i\hbar)^{-1} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* - V \cdot \psi^* \right\} + \psi^* (i\hbar)^{-1} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \cdot \psi \right\} \right] \cdot d^3 r$$

$$= (i\hbar)^{-1} \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* - \cancel{\psi \cdot V \cdot \psi^*} - \frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + \cancel{\psi^* V \cdot \psi} \right\} d^3 r$$

$$= \frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2m} \cdot \frac{1}{i\cancel{\hbar}} \int \left[\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi \right] \cdot d^3 r$$

$$= \frac{-i\hbar}{2m} \int \left[\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi \right] \cdot d^3r$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int \left[\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* \right] d^3r$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int \left[\nabla \cdot \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \cdot \psi^* \right) \right] d^3r$$

* સમજ માટે ⇒ $\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$

$$= \nabla \psi^* \cancel{\nabla} \psi + \psi^* \nabla^2 \psi - \nabla \cancel{\psi} \nabla \psi^* - \psi \nabla^2 \psi^*$$

$$= \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial}{\partial t} \int \psi^2 \cdot d^3r = \frac{i\hbar}{2m} \int \nabla \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) d^3r}$$

$\longrightarrow$ (2)

ઉપરોક્ત સમી. (2) માં $\psi^2 = \rho$ = સંભાવના ઘનતા અને

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right)$$ મૂકતા,

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \cdot d^3r = - \int \nabla \cdot \vec{J} \cdot d^3r$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \cdot d^3r = -\int \text{div}\, \vec{S} \cdot d^3r} \longrightarrow (3)$$

પરંતુ ગોસના પ્રમેય પ્રમાણે,
સદિશના ડાયવર્જન્સનું કદ સંકલન તે સદિશના તે કદને બાંધતી સપાટી પરના પૃષ્ઠસંકલન જેટલું હોય છે. એટલે કે,

$$\boxed{\int \text{div}\, \vec{S} \cdot d^3r = \int \vec{S} \cdot \hat{n}\, d\sigma}$$

→ જ્યાં, $d\sigma$ પૃષ્ઠખંડ છે. અને n આ સપાટી પર સપાટીમાંથી બહાર નીકળતી દિશામાં એકમ સદિશ છે.

$\therefore$ સમી. (3) નીચે પ્રમાણે થશે.

$$\therefore \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \cdot d^3r = -\int \vec{S} \cdot \hat{n}\, d\sigma} \longrightarrow (4)$$

→ સમી. (4) ની જમણી બાજુ $\vec{S}$ સપાટી સંકલન દર્શાવે છે. આ સપાટી આપણા કદ સંકલન માટેના કદને બાંધતી સપાટી છે.

→ પરંતુ આપણે કદ સંકલન અનંત અવકાશ પર લીધેલું છે. માટે, આ કદને બાંધતી સપાટી પણ અનંત અંતરે આવેલી છે.

→ સીમાશરત પ્રમાણે, અનંત અંતરે આવેલી સપાટી પર ψ અને ψ^* બંને શૂન્ય થશે. આથી, $\vec{S}$ નું મૂલ્ય પણ શૂન્ય બનશે.

∴ સમી. (4) ની જમણી બાજુ સપાટી સંકલન શૂન્ય બને છે.

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\int \psi^2 \, d^3r = 0$$ થાય છે.

જે સંભાવનાનું સંરક્ષણ દર્શાવે છે.

Que:-10)

તરંગ યંત્રશાસ્ત્રમાં સાતત્ય સમી. મેળવો.

⇒ $$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, d^3r = -\int \operatorname{div} \vec{S} \, d^3r$$

આ સમી. પરથી,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, d^3r + \int \operatorname{div} \vec{S} \, d^3r = 0$$

$$\therefore \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d^3r + \int \operatorname{div} \vec{S} \, d^3r = 0$$

$$\therefore \boxed{\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S}\right] d^3r = 0} \longrightarrow (A)$$

→ અહી સમગ્ર અવકાશ પર ગમે તે કદ પરનું સંકલન લીધું હોવાથી,

સમી. (A) પરથી,

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}\,\vec{S} = 0} \longrightarrow (B)$$

→ સમી. (B) જેવું જ સમીકરણ તરંગ યંત્રશાસ્ત્રમાં આવે છે. જેને સાતત્ય સમી. કહે છે.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{J} = 0} \longrightarrow (C)$$

જ્યાં, ρ = પ્રવાહીની ઘનતા

અને, $\vec{J}$ = પ્રવાહીની પ્રવાહ ઘનતા

= "પ્રવાહીના વેગને લંબ એવા એકમ ક્ષેત્રફળમાંથી 1 sec માં પસાર થતા પ્રવાહીનો જથ્થો."

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ = ઉપરોક્ત એકમ કદમાં ઘનતાના ફેરફારનો દર.

→ સમી. (C) પરથી કહી શકાય કે, એકમ કદમાંથી જેટલું પ્રવાહી બહાર આવે છે. (કે અંદર દાખલ થાય છે.) તે અનુસાર તે કદમાં ઘનતાનો ફેરફાર થાય છે.

આજ પ્રમાણે, સમી. (B) પરથી લખી શકાય કે, P = સંભાવના ઘનતા અને
$\vec{S}$ = સંભાવના પ્રવાહ ઘનતા.

આમ, સમી. B અને C એક સરખું
સ્વરૂપ ધરાવતા હોવાથી સમી B ને
તરંગ યંત્રશાસ્ત્રનું સાતત્ય સમી. કહેવાય છે

Scanned with CamScanner