કણોના સંઘાત (પ્રકિર્ણન)

1.પ્રવેશ :

આમ તો કોઈને બીજા કોઈ સાથે અથડાવી મારવાનું કામ સારું નથી , તેમ છતાં આવા ધંધા પણ ઘણીવાર ફાયદાકારક નીવડે છે . પ્રકિર્ણન (સંઘાત) નો અભ્યાસ આનું સુંદર ઉદાહરણ છે

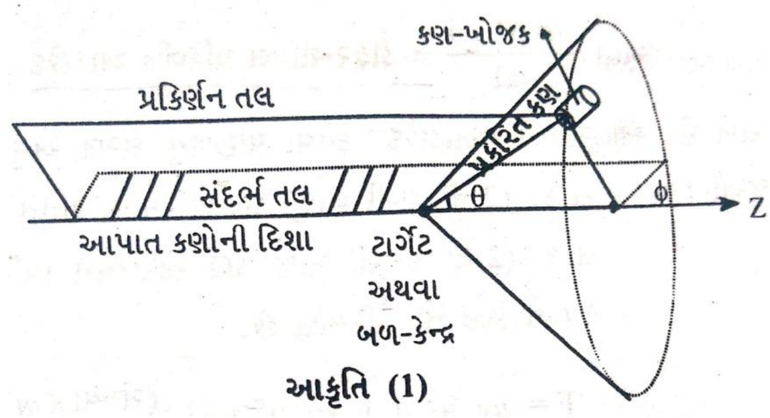
પ્રકિર્ણનનો અભ્યાસ મુખ્યત્વે પરમાણુ - પરમાણુઓ , પરમાણુ - ઇલેક્ટ્રોન , પરમાણુ - પોઝિટ્રોન , ન્યુટ્રોનન્યુટ્રોન , ન્યુટ્રોન – પ્રોટોન પ્રોટોન – પ્રોટોન વચ્ચેની આંતરક્રિયાઓના સંદર્ભમાં આધુનિક ભૌતિકશાસ્ત્રમાં આગવું મહત્ત્વ ધરાવે છે . પરંતુ , આવા અભ્યાસોમાં ક્વોન્ટમયંત્રશાસ્ત્રની ભાષામાં વાત કરવી પડે છે . જો કે પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રમાં પણ મોટી વસ્તુઓ વચ્ચે થતા સંઘાતોનો અભ્યાસ પણ અગત્યનો છે . આનું કારણ એ છે કે પ્રકિર્ણનના અભ્યાસનું ગણિતીય માળખું , “ પ્રકિર્ણનના પ્રયોગોમાં શું કરવામાં આવે છે ” તેના પર રચાયેલું છે . આવા ગણિતીય માળખાની ભાષા અને સંકલિત રાશિઓ પ્રચલિત અને ક્વોન્ટ્રમ યંત્રશાસ્ત્રમાં સમાન જ છે .

2 . “ પ્રકિર્ણનને લગતા પ્રયોગમાં શું કરવામાં આવે છે ? ”

પ્રકિર્ણનના પ્રયોગોમાં એકબીજાને સમાંતર ગતિ કરતા, પરસ્પર આંતરક્રિયા ન કરતા (એટલે કે એકબીજાથી સ્વતંત્ર) અને બધી રીતે સમાન એવા જ્ઞાત ઊર્જાવાળા કણો એક સ્થિર કણ (કે જેને આપણે ટાર્ગેટ કણ) તરફ કે બળનાકેન્દ્ર તરફ ગતિ કરે છે. અત્રે ટાર્ગેટકણ (કે બળકેન્દ્ર) અને આપાતકણો વચ્ચેની આંતરક્રિયાઓ ખૂબ મોટા અંતરે નહિવત બની જતી લઇશું. આવી સ્થિતિમાં જયારે આપાતકણો ટાર્ગેટની નજીકના વિસ્તારમાંથી પસાર થતા હશે ત્યારે તેઓ આંતરક્રિયાઓ અનુભવશે, પરિણામે તેમના ગતિમાર્ગમાંથી તેઓ વિચલિત થશે. આમ ટાર્ગેટની નજીકના વિસ્તારમાં સતત વિચલિત થતા થતા પાછા જયારે ટાર્ગેટથી દૂર પહોંચશે ત્યારે આંતરક્રિયાઓ નહિવત બની જશે અને છેવટે સુરેખમાર્ગ પર ગતિ કરશે. આથી, આપાતકણોની ગતિની પ્રારંભિક અને અંતિમ દિશાઓ જુદી જુદી હશે. આ થઈ કહેવાય પ્રકિર્ણનની ઘટના. આ ઘટનામાં ટાર્ગેટ પાસેથી જુદી જુદી દિશાઓમાં કેટલા કણો જાય છે તેની નોંધ લેવામાં આવે છે. સમગ્ર પરિસ્થિતિની પ્રથમ ભૌમિતિક રજૂઆત કરી, ભૌતિકરાશિઓ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે .

3 . પ્રકિર્ણનની ભૌમિતિક રજૂઆત :

આકૃતિ (1) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપાતકણોની ગતિની દિશા પર યામપધ્ધતિની z – અક્ષ લેવામાં આવે છે . બળકેન્દ્ર અથવા સ્થિર ટાર્ગેટકણ પર યામ પધ્ધતિનું ઉગમ્બિંદુ લેવામાં આવે છે.



આકૃતિ (1)

અહીં આપણે કેન્દ્રીયબળો ધ્યાનમાં લઇશું . આવા કોયડાઓમાં ગોળીય ધ્રુવીય યામપધ્ધતિમાં વધારે સરળતાથી ગણતરીઓ કરી શકાય છે .

એક વાત નોંધો કે અત્રે આંતરક્રિયા ટાર્ગેટના નજીકના જ વિસ્તારમાં થતી હોવાથી , પ્રકિર્ણન પામેલા કણો જયારે ટાર્ગેટથી ઘણે દૂર ગતિ કરતા હોય છે ત્યારે તેઓ જાણે કે ટાર્ગેટ પરથી ત્રિજયાવર્તી દિશાઓમાં જાય છે તેમ ગણી શકાય છે .

આકૃતિ (।) માં પ્રકેરિત અને આપાતકણોની દિશાઓ વચ્ચેનો કોણ θ છે. અત્રે કેન્દ્રિયબળો લીધાં હોવાથી , z – અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિતિ હોવાથી θ કોણે પ્રકિર્ણન પામતાકણો સંમિત રીતે, આકૃતિમાં દર્શાવેલા θ કોણવાળા શંકુના પૃષ્ઠ પર ગતિ કરતા હોય છે. આ બધાજ કણો માટે φ યામ સમાન જ હોય છે . આમ , આવા કણોને (θ, φ) કોણે પ્રકિર્ણન પામતા ગણી શકાય છે . આકૃતિમાં (θ, φ) કોણે એક “ કણ - ખોજક ” યંત્ર પણ સાંકેતિકરૂપે દર્શાવવામાં આવ્યું છે . આ યંત્ર વડે , (θ, φ) કોણે પ્રકિર્ણન પામતા કણોની સંખ્યા જાણી શકાય છે.

4. થોડી વ્યાખ્યાઓ :

(i) આપાતફલક્સ (અથવા) આપાત ફલક્સ ઘનત્વ:

આપાતકણોની ગતિની દિશાને લંબ એવા એકમ ક્ષેત્રફળમાંથી એકમ સમયમાં પસાર થતા કણોની સંખ્યાને આપાત ફલક્સ (અથવા) આપાત ફલક્સ ઘનત્વ કહે છે .

જો આપાતકણોનો વેગ v હોય તો , આ વેગને લંબ એવા એકમ ક્ષેત્રફળમાંથી એકમ સમયમાં પસાર થતા કણો v જેટલી લંબાઈના અને એકમ આડછેદવાળા કાલ્પનિક નળાકારમાં સમાયેલા હશે. આથી જો આપાતકણોનું વિતરણ નિયમિત ધારીએ અને તેમનું સંખ્યા ઘનત્વ n લઇએ તો આવા કણોની સંખ્યા nv થશે .

આપાતફલક્સ , $F = nv$ ____ (1)

(ii) પ્રકિર્ણનકોણ :

આપાતકણોની ગતિની દિશા અને પ્રકેરિત કણોની ગતિની દિશા વચ્ચેના કોણને પ્રકિર્ણનકોણ કહે છે . આકૃતિ (।) માં આ કોણને θ વડે દર્શાવ્યો છે .

(iii) પ્રકિર્ણનઆડછેદ :

ધારો કે (θ, φ) કોણે , ΔΩ જેટલા સુક્ષ્મ ઘનકોણમાં Δt સમયમાં પ્રકિર્ણન પામતા કણોની સંખ્યા ΔN છે. અત્રે સ્પષ્ટ જ છે કે

$$\Delta N \propto \Delta\Omega$$

$$\propto \Delta t$$

$$\propto F$$

$$\therefore \Delta N \propto \Delta\Omega \bullet \Delta t \bullet F$$

$$\therefore \Delta N = \frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\,\Omega}\,\Delta\Omega \bullet \Delta t \bullet F \text{-----------------------------} (2)$$

અહીં $\frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\,\Omega}$ ને **ડીફરન્શીયલ પ્રકિર્ણન આડછેદ** કહેવામાં આવે છે. તેનું મૂલ્ય (θ, φ) પર આધાર રાખે છે. આ રાશિને "આડછેદ" કહેવા પાછળનું કારણ એવું છે કે તેના પરિણામ **m^2** ના છે.

જુઓ : સ.ક.(2) ની ડાબીબાજુ ΔN પરિમાણરહિત છે. સ.ક. (2) ની જમણીબાજુ ΔΩ સ્ટેરેડિયન (પરિમાણની દૃષ્ટિએ પરિમાણરહિત) માં છે. Δt ને sec ના પરિમાણ છે. સમી. (1) પરથી F = nv પરથી F ના પરિમાણ $\frac{(\text{સંખ્યા})(m)}{m^{3}\cdot sec} = \frac{m^{-2}}{sec}$ છે.

આથી, જમણી બાજુ પરિમાણરહિત બને તે માટે

$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} \times$ **સેકન્ડ** $\times \frac{m^{-2}}{sec}$ લેતાં $\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega}$ ના પરિમાણ **m^2** બને, જે ક્ષેત્રફળના પરિમાણ દર્શાવે છે.

સ.ક. (2) માં જો ΔΩ = 1 સ્ટેરેડિયન , Δt = 1 sec અને F = 1 $\frac{m^{-2}}{sec}$ લઇએ તો

$\Delta N = \frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\,\Omega}$ થાય.

આ પરથી, **ડીફરન્શીયલ પ્રકિર્ણન આડછેદ**ની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ બાંધી શકાય.

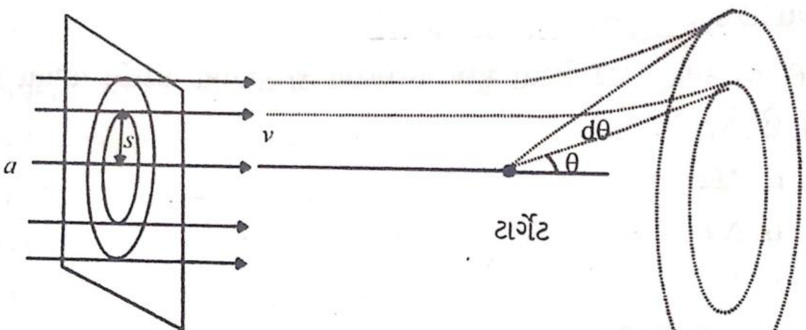
"એકમ આપાત ફલક્સ દીઠ, એકમ સમયમાં, (θ, φ) કોણે, એકમ ઘનકોણમાં પ્રકિર્ણન પામતાકણોની સંખ્યાને તે (θ, φ) દિશા માટે ડીફરન્શીયલ પ્રકિર્ણન આડછેદ કહે છે."

પ્રાયોગિક અભ્યાસોમાં આ ડિફરન્શીયલ પ્રકિર્ણન આડછેદનું (θ, φ) ના વિધેય રૂપે માપન કરવામાં આવે છે. આથી, ગણિતીયવાદ પણ એવી રીતે જ તૈયાર કરવામાં આવે છે કે જેમાં $\frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\,\Omega}$ ની ગણતરી કરી શકાતી હોય.

(iv) – સંઘાત પ્રાચલ :

આ પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રનો પ્રાચલ છે.

આ પ્રાચલ સમજવા માટે આકૃતિ (2) ધ્યાનમાં લો.



આકૃતિ (2)

આકૃતિ (2) માં a વડે દર્શાવેલ કણો આપાત થતી વખતે ટાર્ગેટથી s જેટલા લંબ અંતરે રહીને ગતિ કરે છે. અંતર s ને સંઘાત - પ્રાચલ (Impact parameter) કહે છે. આ પ્રાચલથી આપાતકણનું ટાર્ગેટના સંદર્ભમાં કોણીયવેગમાન l જાણી શકાય છે.

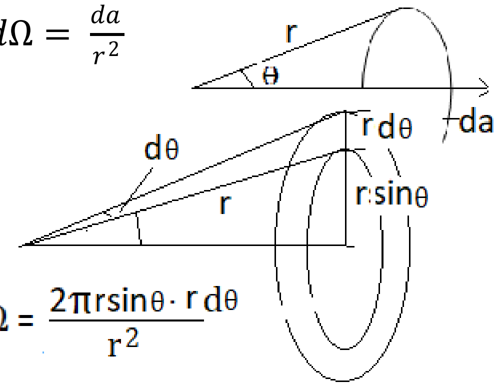
વળી , આકૃતિ (2) પરથી સ્પષ્ટ છે કે જે કણો માટે સંઘાત પ્રાચલનું મૂલ્ય s અને s + ds વચ્ચે હશે તેવા કણોનો પ્રકિર્ણનકોણ θ અને θ + dθ વચ્ચે હશે. આથી જો આપાત ફલક્સ F હોય તો જેમનો સંઘાત પ્રાચલ s અને s + ds વચ્ચે હોય તેવા, એક સેકન્ડમાં ટાર્ગેટ પર આપાત થતા

કણોની સંખ્યા = (2πs) (ds) F ______ (4)

આટલી સંખ્યાના કણો θ અને θ+dθ વચ્ચેના ઘનકોણમાં એક સેકન્ડમાં પ્રકિર્ણન પામે છે. આ ઘનકોણ,

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta \text{ -----(5)}$$

$$d\Omega = \frac{da}{r^2}$$



$$d\Omega = \frac{2\pi r \sin\theta \cdot r\, d\theta}{r^2}$$

સ.ક. (4) અને (2) પરથી, એક સેકન્ડમાં ઘનકોણ $d\Omega$ માં પ્રકેરિત કણોની સંખ્યા

$(2\pi s)$ (ds) F હોય તો, એકમ ઘનકોણમાં પ્રકેરિત કણોની સંખ્યા કેટલી ?

આમ , આપાત ફ્લક્સ F માટે એકમ ઘનકોણમાં પ્રકેરિત કણોની સંખ્યા

$$\frac{(2\pi s)(ds)F}{d\Omega} = \frac{(2\pi s)\,(ds)\,F}{2\pi \sin\theta \, d\theta}$$

એકમ ઘનકોણમાં, એકમ ફ્લક્સ દીઠ, એકમ સમયમાં પ્રકેરિત કણોની સંખ્યા, વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\,\Omega} = \frac{s}{\sin\theta}\frac{ds}{d\theta}$$

હવે, s વધે છે તેમ પ્રકિર્ણનકોણ θ ઘટે છે, તેથી ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $\frac{ds}{d\theta}$ ઋણ હોવાથી

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\,\Omega} = -\frac{s}{\sin\theta}\frac{ds}{d\theta} \qquad (5)$$

સ.ક. (5) એ સંઘાત પ્રાચલના સંદર્ભમાં ડિફરન્શીયલ પ્રકિર્ણન આડછેદનું મૂલ્ય આપે છે.

(5) સ્થિતિસ્થાપક અને અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણન :

સ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણન: જે પ્રકિર્ણન ઘટનામાં પ્રકિર્ણન અગાઉની પ્રકિર્ણન અનુભવતા કણોની કુલ ગતિ ઊર્જા તેમની પ્રકિર્ણન બાદની કુલ ગતિ ઊર્જા જેટલી જ હોય અર્થાત કુલ ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું હોય તેવા પ્રકિર્ણનને સ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણન કહે છે." આવી ઘટનામાં પ્રકિર્ણન અનુભવતા કણોની આંતરિક ઊર્જામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી, કે પ્રકિર્ણન દરમિયાન કણો બીજી કોઈ રીતે ઊર્જા ગુમાવતા નથી.

અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણનઃ આવા પ્રકિર્ણનમાં કુલ ગતિ ઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું નથી. પ્રકિર્ણન અગાઉની કણોની કુલ ગતિ ઊર્જામાંનો અમુક ભાગ કોઈને કોઈ પ્રકારની ઊર્જાના સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત થાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે જયારે બે મોટા ઘન ગોળાઓ અથડાય છે ત્યારે તેમની ગતિ ઊર્જાના અમુક ભાગનું ઉષ્મા ઊર્જામાં અને ધ્વનિ ઊર્જામાં રૂપાંતરણ થાય છે. પરિણામે પ્રકિર્ણન બાદની તેમની કુલ ગતિ ઊર્જા, પ્રકિર્ણન અગાઉની કુલ ગતિ ઊર્જા જેટલી રહેતી નથી.

ઘણી વાર વિદ્યુત ભારિત કણનું બીજા વિદ્યુતભારિત કણ વડે પ્રકિર્ણન થાય છે ત્યારે વિદ્યુતભારિતકણ પ્રવેગિત બનતાં તે વિદ્યુત ચુંબકીય વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરે છે અને તેથી તેની ગતિ ઊર્જામાં ઘટાડો થાય છે.
પ્રકિર્ણનની ઘટનામાં ભાગ લેતા કણોને આંતરિક બંધારણ પણ હોઈ શકે ઉદાહરણ તરીકે કોઈ પરમાણુ વડે ઇલેક્ટ્રોનના પ્રકિર્ણનનો વિચાર કરો . હવે પરમાણુને આંતરિક ઊર્જાસ્તરો હોય છે . જ્યારે પરમાણુ સાથે આપાત ઇલેક્ટ્રોનની આંતરક્રિયા થાય છે ત્યારે પરમાણુ એક ઊર્જાસ્તરમાંથી સંક્રાંતિ કરી બીજા ઊર્જાસ્તરમાં જાય છે. (બીજા શબ્દોમાં તેના આંતરિક બંધારણની ઊર્જામાં ફેરફાર થાય છે.) આવી સ્થિતિમાં પણ કુલ ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું નથી.

6. પ્રયોગશાળાયામ પધ્ધતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રયામ પધ્ધતિ :

અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે ટાર્ગેટને સ્થિર લીધો છે. આ ટાર્ગેટ પ્રયોગશાળાના સંદર્ભમાં સ્થિર લીધો. વળી , આ સ્થિર ટાર્ગેટ પરજ આપણે યામપધ્ધતિનું ઉદગમબિંદુ પણ લીધું. આમ , આપણે જે યામપધ્ધતિના સાપેક્ષમાં પ્રકિર્ણન પામતા કણની ગતિની વાત કરી તે યામપધ્ધતિ પ્રયોગશાળા-યામપધ્ધતિ (Laboratory co-ordinate system) કહેવાય છે.

હકીક્તમાં પ્રકિર્ણનની ઘટનામાં ઘણીવાર પ્રકિર્ણન બાદ ટાર્ગેટ કણ રીકોઇલ થાય છે અને બન્ને કણો પ્રકિર્ણન બાદ ગતિ કરતા હોય છે. આથી , પ્રકિર્ણનનો કોયડો બે કણોની ગતિને લગતો કોયડો બને છે.

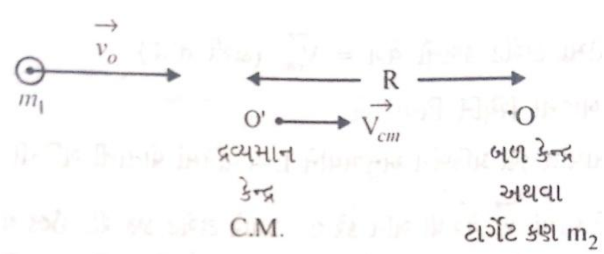
હવે આપણે જાણીએ છીએ કે બે કણોની ગતિના કોયડાને એક કણની ગતિના કોયડામાં ફેરવી શકાય છે. તમે F Y B.Sc. માં હાઈડ્રોજન પરમાણુમાં ઇલેકટ્રોનની ગતિના અભ્યાસમાં પ્રોટોનની ગતિનો પણ વિચાર કર્યો હતો ત્યારે બે કણોની ગતિને બદલે રીડ્યુસ્ડ - દળ (μ) ધરાવતી એક કણની ગતિમાં નિરૂપણ કરવામાં આવ્યું હતું. આ ચર્ચામાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે બન્ને કણોની ગતિ થતી હતી તે તમને યાદ હશે જ. ઉપર્યુક્ત ચર્ચા દર્શાવેછે કે પ્રકિર્ણનના અભ્યાસમાં પણ જો દ્રવ્યમાનકેન્દ્રને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે તો કદાચ ગણતરી સહેલી થઈ શકે.

હકીકતમાં પ્રકિર્ણનના અભ્યાસમાં પ્રયોગશાળા યામપધ્ધતિ ઉપરાંત, જેનું ઉગમ બિંદુ બન્ને કણના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર હોય તેવી યામપધ્ધતિ પણ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.

હવે આપણી પાસે બે યામપધ્ધતિઓ થઈ. (I) પ્રયોગશાળા યામપધ્ધતિ (2) દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર યામપધ્ધતિ.

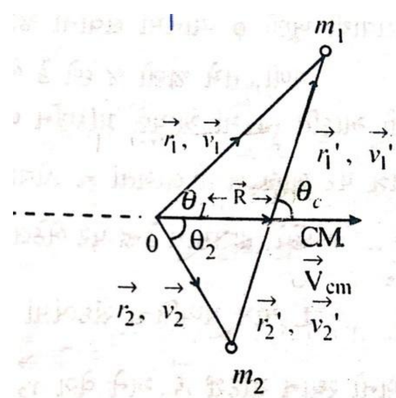
વળી, આપણે એક યામપધ્ધતિમાં મળેલ રાશિઓ અને પરિણામોને બીજી યામપધ્ધતિમાં ફેરવી શકીએ

આકૃતિ(3) માં પ્રકિર્ણન અગાઉની સ્થિતિ દર્શાવી છે તે ધ્યાનમાં લો.



પ્રકિર્ણન અગાઉની કોઇ ક્ષણે સ્થિતિ

આકૃતિ (3)



પ્રકિર્ણન બાદની સ્થિતિ

આકૃતિ (4)

અહીં પ્રયોગશાળા યામપધ્ધતિનું ઉગમબિંદુ 0, ટાર્ગેટ પર કે બળકેન્દ્ર પર છે. આ યામપધ્ધતિને આપણે L – યામપધ્ધતિથી ઓળખીશું. જેનું ઉગમબિંદુ દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર O' પર છે તેવી યામપધ્ધતિને આપણે C.M – યામપધ્ધતિથી ઓળખીશું. ચર્ચા સહેલાઇથી સમજી શકાય તે માટે આપણે એક અવલોકનકર્તા 0 પર અને બીજો અવલોકનર્તા O' પર બેઠેલો કલ્પીશું

પ્રથમ આપણે અથડામણ અગાઉની કોઈક્ષણે સ્થિતિનો; બન્ને યામપધ્ધતિના સંદર્ભમાં વિચાર કરીએ.

L યામપધ્ધતિમાં આપાતકણનો સ્થાનસદિશ ધારો $\overrightarrow{r_0}$, અને દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની સ્થાનસદિશ R છે.

દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની વ્યાખ્યા અનુસાર

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_0} + m_2(\vec{R})}{m_1+m_2}$$

અહી દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર L – યામપધ્ધતિના ઉગમબિંદુ O' પર છે માટે $\vec{R} = 0$ છે.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_0} + m_2(0)}{m_1+m_2} \text{ -- } (6)$$

સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં

$$\overrightarrow{\dot{R}} = \overrightarrow{V_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{\dot{r}_0}}{m_1+m_2} = \frac{m_1\overrightarrow{v_0}}{m_1+m_2} \text{ --- } (7)$$

અહીં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ $\overrightarrow{V_{cm}}$ એ L-પધ્ધતિમાં છે. C. M. ના ઉગમબિંદુ પર બેઠેલા અવલોકનકર્તાના સંદર્ભમાં વિચારીએ તો તે પોતેજ જમણી તરફ $\overrightarrow{V_{cm}}$ વેગથી ગતિ કરે છે. આથી, આ અવલોકનકર્તાને આપાતકણ $\overrightarrow{v_0}$ - $\overrightarrow{V_{cm}}$, વેગથી પોતાના તરફ ગતિ કરતું જણાય છે. એટલું જ નહિ, પણ તેને ટાર્ગેટકણ પણ પોતાના તરફ $\overrightarrow{V_{cm}}$ વેગથી ગતિ કરતું જણાય છે.

આમ , C.M પધ્ધતિમાં આપાતકણનો વેગ = $\overrightarrow{v_0}$ - $\overrightarrow{V_{cm}}$ " (જમણીતરફ) --------------------------------------(8)

C.M. – પધ્ધતિમાં ટાર્ગેટકણનો વેગ $\overrightarrow{V_{cm}}$ (ડાબીતરફ)--(9)

હવે , પ્રકિર્ણનબાદની સ્થિતિ વિચારીએ. આ સ્થિતિમાં આપાતકણ પ્રકિર્ણન અનુભવીને L- પધ્ધતિમાં પોતાની ગતિની મૂળ દિશા (આપાતદિશા) સાથે θ_L, કોણ બનાવતી દિશામાં $\overrightarrow{v_1}$ વેગથી ગતિ કરે છે, જયારે ટાર્ગેટકણ રીકોઇલ્ડ થઈ આકૃતિ (4) માં દર્શાવ્યા અનુસાર છે, θ_2 દિશામાં ગતિ કરે છે. યાદ રાખોકે આપણે કેન્દ્રીયબળોનો વિચાર કરવાના છીએ એટલે સમગ્ર પરિસ્થિતિ આપાતકણની દિશા કે જેને આપણે L- પધ્ધતિમાં Z– અક્ષ તરીકે લીધી છે, તેને અનુલક્ષીને સંમિત હોવાથી ખૂણો φ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી.

વળી , તમે જાણો જ છો કે બે કણોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તે બે કણોને જોડતી રેખા પર જ હોય છે . આથી તો આકૃતિ (4) માં આપણે પ્રકિર્ણન બાદ દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર બે કણોને જોડતી રેખા પર લીધું છે. અત્રે બે કણોના તંત્ર પર બાહ્ય બળો લાગતાં ન હોવાથી સમગ્ર ઘટના દરમિયાન દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ $\overrightarrow{V_{cm}}$, અચળ રહે છે .

હવે , દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર બેઠેલ અવલોકનકર્તાને બન્ને કણો પરસ્પર વિરુધ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં જણાય છે .

L યામપધ્ધતિના સંદર્ભમાં કોઈ ક્ષણે ,પ્રકિર્ણિત કણનો સ્થાનસદિશ $\vec{r_1}$ અને વેગ $\vec{v_1}$, કોઈ ક્ષણે , ટાર્ગેટકણ નો સ્થાનસદિશ $\vec{r_2}$ અને વેગ $\vec{v_2}$ છે. CM– યામપધ્ધતિમાં પ્રકિર્ણિત કણનો સ્થાનસદિશ $\vec{r_1'}$ છે અને $\vec{v_1'}$ વેગ છે . જયારે રીકોઇલ્ડ કણનો સ્થાનસદિશ $\vec{r_2'}$ છે અને $\vec{v_2'}$ વેગ છે . આ યામપધ્ધતિમાં , આકૃતિ (4) પરથી અને પ્રકિર્ણનકોણની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે પ્રકિર્ણનકોણ θ_c છે.

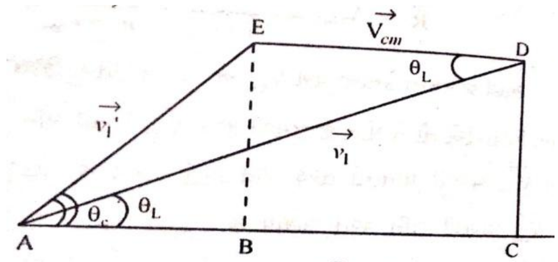
આકૃતિ (4) પરથી $\vec{R'}$ + $\vec{r_1'}$ = $\vec{r_1}$

$$\overrightarrow{V'_{cm}} + \overrightarrow{v_1'} = \overrightarrow{V_{cm}} + \overrightarrow{v_1'} = \overrightarrow{v_1} \text{ -- } (10)$$

(કારણકે $\overrightarrow{V'_{cm}}$ = $\overrightarrow{V_{cm}}$. જે અચળ છે)

$\overrightarrow{V_{cm}}$, $\overrightarrow{v_1}$ અને $\overrightarrow{v_1'}$ ના સદિશો આકૃતિ (5) માં દર્શાવ્યા છે.

આકૃતિ (5) પરથી ,



આકૃતિ (5)

$$\tan \theta_L = \frac{DC}{AC} = \frac{EB}{AB+BC} \text{ ------------------------ } (11)$$

પણ, $EB = \overrightarrow{v_1'} \sin\theta_c$ ------------------------------(12)

$AB = \overrightarrow{v_1'} \cos\theta_c$ ------------------------------ (13)

$BC = ED = V_{cm}$ ------------------------------ (14)

આ મૂલ્યો સ.ક. (11) માં અવેજ કરતાં,

$$\tan \theta_L = \frac{v'_1 \sin \theta_c}{v'_1 \cos \theta_c + V_{cm}} \text{ ------------------------ } (15)$$

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_c}{\cos \theta_c + \frac{V_{cm}}{v'_1}} \text{ ------------------------ } (16)$$

હવે , અથડામણ અગાઉ C.M. – પધ્ધતિમાં આપાતકણનો વેગ

$$= v_0 - V_{cm}$$

$$= v_0 - \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_1 v_0 + m_2 v_0 - m_1 v_0}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2} \text{ ------------------------ } (17)$$

C.M.- પધ્ધતિમાં અથડામણ અગાઉ ટાર્ગેટકણનો વેગ (મૂલ્યમાં)

$$V_{cm} = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \text{ ------------------------ } (18)$$

અથડામણ અગાઉ કુલગતિ ઊર્જા ,

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2 v_0^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2 v_0^2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 v_0^2 (m_1 + m_2)}{(m_1+m_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_0^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 \text{ ------------------------ } (19)$$

જ્યાં $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ = રીડયુસ્ટદળ,

બરાબર યાદ રાખો કે આ ગતિ ઊર્જા આપણે C.M.- પધ્ધતિમાં ગણી છે.

હવે C.M – પધ્ધતિમાં તે જ બે કણોની પ્રકિર્ણનબાદની ગતિઊર્જા ગણીએ.

$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \text{ --(20,a)}$$

પણ C.M.— પધ્ધતિમાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાન સદિશ શૂન્ય હોય છે. C.M.— પધ્ધતિનું ઉગમબિન્દુ બંને કણના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર હોય છે. માટે $\vec{R}$ = 0 થશે. માટે સમી.(6) પ્રમાણે

$$\vec{R} = \frac{m_1 \overrightarrow{r_1'} + m_2 \overrightarrow{r_2'}}{m_1 + m_2}$$

$$0 = \frac{m_1 \overrightarrow{r_1'} + m_2 \overrightarrow{r_2'}}{m_1 + m_2}$$

$$0 = m_1 \overrightarrow{r_1'} + m_2 \overrightarrow{r_2'}$$

ઉપરના સમીકરણનું સમયની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં ,

$$0 = m_1 \overrightarrow{\dot{r}_1'} + m_2 \overrightarrow{\dot{r}_2'}$$

$$0 = m_1 \overrightarrow{v_1'} + m_2 \overrightarrow{v_2'}$$

$$m_1 \overrightarrow{v_1'} = -m_2 \overrightarrow{v_2'} \text{ --(20)}$$

$$\overrightarrow{v_2'} = -\frac{m_1}{m_2} \overrightarrow{v_1'} \quad \text{(મૂલ્યમાં)--(21)}$$

સમી. (21) માંથી v_2' નું મૂલ્ય સમી. (20, a) માં મૂકતાં

$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_1'^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} v_1'^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \frac{(m_1 + m_2)}{m_2} v_1'^2 \text{ --(22)}$$

જો અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક લઇએ તો ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય. માટે

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{m_2} v_1'^2 \text{ ---------------------(22,a)}$$

સમી. (18) પરથી

$$v_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V_{cm}$$

$$v_0^2 = \frac{(m_1+m_2)^2}{{m_1}^2} V_{cm}^2$$

ઉપરના સમી. પરથી v_0^2 નું મૂલ્ય સમી.(22,a) માં મૂકતાં

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{(m_1+m_2)^2}{{m_1}^2} \quad V_{cm}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2} v_1^{\prime 2}$$

$$\therefore \quad \frac{m_2}{m_1}(m_1+m_2) V_{cm}^2 = \frac{m_1}{m_2}(m_1+m_2) \; v_1^{\prime 2}$$

$$\therefore \quad V_{cm}^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_1^{\prime 2} \text{-----} (23)$$

$\therefore \quad \frac{V_{cm}}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2}$ નો ઉપયોગ સમી. (16) માં કરતાં

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c + \frac{m_1}{m_2}} \text{-----} (24)$$

લખવામાં સુગમતા રહે તે માટે $\frac{V_{cm}}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2} = \gamma$ લેતાં

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c + \gamma} \text{-----} (25)$$

γ ના જુદા જુદા મૂલ્યો માટે θ_L અને θ_c વચ્ચેના સંબંધો પર અસરો :

આ અસરો સમી. (25) પરથી જાણી શકાય છે.

કિસ્સો 1 : $\gamma < 1$, એટલે કે $m_2 > m_1$

આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રકીર્ણન કોણ 0 થી 2π વચ્ચે હોઇ શકે.. આપણે આ કિસ્સામાં θ_c ને 0 થી π સુધી લઈએ તો θ_L **કેટલો મળશે તે જોઈશું.**

સમી. (25)માં $\theta_c = 0$ લેતા.

$$\tan\theta_L = \frac{\sin 0}{1+\gamma} \qquad \text{જ્યાં}$$

$$\tan\theta_L = 0 \quad \therefore \theta_L = 0$$

આમ જ્યારે γ ગમે તે હોય તો પણ જ્યારે C.M.– પધ્ધતિમાં પ્રકીર્ણન કોણ શૂન્ય હોય છે, ત્યારે L– પધ્ધતિમાં પણ પ્રકીર્ણન કોણ શૂન્ય જ મળે છે.

જ્યારે $\theta_c = 90^\circ$ હોય ત્યારે

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}+\gamma} = \frac{1}{\gamma} > 1 \quad (\because \gamma < 1)$$

આમ $\tan\theta_L > 1$ હોવાથી કહી શકાય કે θ_L નું મૂલ્ય, આ કિસ્સામાં 45^0 કરતાં વધારે જ હશે. જો θ_c નું મૂલ્ય $\cos^{-1}(-\gamma)$ હોય તો,

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\{\cos^{-1}(-\gamma)\}}{\cos\{\cos^{-1}(-\gamma)\}+\gamma}$$

$$= \frac{\sin\{\cos^{-1}(-\gamma)\}}{-\gamma+\gamma} = \infty$$

$$\therefore \quad \theta_L = \frac{\pi}{2}$$

છેવટે જ્યારે $\theta_c = \pi$ હોય ત્યારે,

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\pi}{\cos\pi+\gamma} = \frac{0}{1+\gamma} = 0$$

$$\therefore \quad \theta_L = 0$$

આમ $\gamma < 1$ કિસ્સામાં θ_c જેમ 0 થી વધતો વધતો π થાય છે તે દરમિયાનમાં ઉપર સમજાવ્યું તેમ θ_L પણ 0 થી π સુધી બદલાય છે.

કિસ્સો -2 : $\gamma = 1$ (એટલે કે, $m_2 = m_1$)

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c+\gamma}$$

$$= \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c+1}$$

$$= \frac{2\cdot\sin\frac{\theta_c}{2}\cdot\cos\frac{\theta_c}{2}}{2\cos^2\frac{\theta_c}{2}}$$

$$= \tan\frac{\theta_c}{2}$$

અહી $\sin\theta_c = 2\cdot\sin\frac{\theta_c}{2}\cdot\cos\frac{\theta_c}{2}$ અને $\cos\theta_c + 1 = 2\cos^2\frac{\theta_c}{2}$ નો ઉપયોગ કરેલ છે.

$$\therefore \quad \theta_L = \frac{\theta_c}{2}$$

આમ $\gamma = 1$ કિસ્સામાં θ_c એ 0 થી π સુધી બદલાય છે, તે દરમિયાન θ_L એ 0 થી $\frac{\pi}{2}$ સુધી બદલાય છે. અર્થાત આ કિસ્સામાં , C.M.– પધ્ધતિમાં મહત્તમ પ્રકીર્ણન કોણ π હોય છે, ત્યારે L– પધ્ધતિમાં મહત્તમ પ્રકીર્ણન કોણ $\frac{\pi}{2}$ હોય છે,

કિસ્સો -3 : $\gamma > 1$ (એટલે કે, $m_1 > m_2$)

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c + \gamma} \quad \text{--------(26.a)}$$

જ્યારે $\theta_c = 0, \sin\theta_c = 0, \cos\theta_c = 1$ અને $\tan\theta_L = \frac{0}{1+\gamma} \therefore \theta_L = 0$

જ્યારે $\theta_c = \frac{\pi}{2}, \sin\theta_c = 1, \cos\theta_c = 0$ અને $\tan\theta_L = \frac{1}{\gamma}$

પણ $\gamma > 1$ હોવાથી $\theta_L < 45^\circ$

જ્યારે $\theta_c = \pi$ હોય ત્યારે $\sin\theta_c = 0, \cos\theta_c = -1$ અને $\tan\theta_L = \frac{0}{-1+\gamma}$

$\therefore \theta_L = 0$ થશે.

આપેલ γ (>1) માટે $\therefore \theta_L$નું મહત્તમ મૂલ્ય :

આ માટે $\frac{d\theta_L}{d\theta_c} = 0$ થવું જોઈએ. સમી.(૨૬) નું θ_c ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$\sec^2\theta_L \frac{d\theta_L}{d\theta_c} = \frac{\cos\theta_c}{\cos\theta_c + \gamma} + \frac{\sin^2\theta_c}{(\cos\theta_c + \gamma)^2} \quad \text{--------(27)}$$

$\frac{d\theta_L}{d\theta_c} = 0$ લેતાં $0 = \frac{\cos\theta_c}{\cos\theta_c + \gamma} + \frac{\sin^2\theta_c}{(\cos\theta_c + \gamma)^2}$

$$\therefore \frac{\cos\theta_c}{\cos\theta_c + \gamma} = -\frac{\sin^2\theta_c}{(\cos\theta_c + \gamma)^2}$$

$$\therefore \cos\theta_c = -\frac{\sin^2\theta_c}{\cos\theta_c + \gamma}$$

$$\therefore \cos^2\theta_c + \gamma\cos\theta_c = -\sin^2\theta_c = -1 + \cos^2\theta_c$$

$$\therefore \gamma\cos\theta_c = -1$$

$$\therefore \cos\theta_c = -\frac{1}{\gamma} \quad \text{--------(28. a)}$$

$$\therefore \theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\gamma}\right)$$

θ_c ના આ મૂલ્ય માટે,

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\left\{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\gamma}\right)\right\}}{\cos\left\{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\gamma}\right)\right\}+\gamma}$$

$$= \frac{\sin\left\{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\gamma}\right)\right\}}{-\frac{1}{\gamma}+\gamma}$$

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\left\{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\gamma}\right)\right\}}{\frac{\gamma^2-1}{\gamma}}$$

$$\tan\theta_L = \frac{\gamma\sin\left\{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\gamma}\right)\right\}}{\gamma^2-1} \quad \text{--} (28)$$

આ સૂત્ર પરથી $\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\gamma}\right)$ હોય ત્યારે θ_L નું મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે. વળી, આ સૂત્ર દર્શાવે છે કે $\tan\theta_L$ ધન છે. એટલે કે θ_L નું મૂલ્ય પ્રથમ ચરણમાં છે.એટલે કે

જ્યારે $\gamma>1$ હોય ત્યારે θ_L (max) $< 90^0$ સમી (28) થોડું અઘરું પડે તેમ છે. એટલે θ_L (max) આપણે વધારે સાદા સ્વરૂપમાં મેળવીએ.

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c+\gamma}$$

$$\tan^2\theta_L = \frac{\sin^2\theta_c}{(\cos\theta_c+\gamma)^2}$$

$$1+\tan^2\theta_L = sec^2\theta_L = \frac{(\cos\theta_c+\gamma)^2+\sin^2\theta_c}{(\cos\theta_c+\gamma)^2}$$

$$sec^2\theta_L = \frac{\sin^2\theta_c+\cos^2\theta_c+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2}{(\cos\theta_c+\gamma)^2}$$

$$sec^2\theta_L = \frac{1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2}{(\cos\theta_c+\gamma)^2}$$

$$cos^2\theta_L = \frac{(\cos\theta_c+\gamma)^2}{1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2}$$

$$\cos\theta_L = \frac{\cos\theta_c+\gamma}{(1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{--} (29)$$

સમી. (28. a) પરથી $\cos\theta_c = -\frac{1}{\gamma}$ મૂકતાં

$$\cos\theta_L = \frac{-\frac{1}{\gamma}+\gamma}{\left(1+2\gamma(-\frac{1}{\gamma})+\gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\theta_L = \frac{-\frac{1}{\gamma}+\gamma}{(1-2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\theta_L = \frac{\gamma^2-1}{\gamma(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}$$

$$cos^2\theta_L = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}$$

$$sin^2\theta_L = 1 - \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2-\gamma^2+1}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\sin\theta_L = \frac{1}{\gamma}$$

$$\therefore \theta_{L(max)} = sin^{-1}(\frac{1}{\gamma})$$

$\therefore \theta_{L(max)} = sin^{-1}(\frac{m_2}{m_1})$,--- ($\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ હોવાથી)-- ($m_2 > m_1$ માટે). --------------(29,a)

L- યામપધ્ધતિ અને C.M. – યામપધ્ધતિમાં ડીફરન્શીયલ પ્રકીર્ણન આડછેદ વચ્ચેનો સંબંધ :

L- યામપધ્ધતિના $d\Omega$ જેટલા ઘનકોણમાં આપેલ સમયમાં પ્રકીર્ણન પામતાં કણોની સંખ્યા, C.M.- પધ્ધતિમાં $d\Omega$ને અનુરૂપ $d\Omega'$ ઘનકોણમાં પ્રકીર્ણન પામતાં કણોની સંખ્યા, જેટલી જ હોવી જોઈએ. આ કણોની સંખ્યા અગાઉ સમી.(2)માં દર્શાવી છે.

$$\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega}\,\Delta\Omega\,\Delta t\,F = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\,\Delta\Omega'\,\Delta t\,F \text{---(30)}$$

પરંતુ $\Delta\Omega = 2\pi\,\sin\theta_L\,d\theta_L$

અને $\Delta\Omega' = 2\pi\,\sin\theta_c\,d\theta_c$

$$\therefore \frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega}\,2\pi\,\sin\theta_L\,d\theta_L = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\,2\pi\,\sin\theta_c\,d\theta_c$$

$$\therefore \boxed{\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\,\frac{\sin\theta_c}{\sin\theta_L}\,\frac{d\theta c}{d\theta_L}} \text{---(31)}$$

અથવા

$$\therefore \boxed{\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\;\frac{d\,(\sin\theta_c\,)}{d\,(\sin\theta_L\,)}} \quad \text{------(32)}$$

આ સંબંધ સ્પષ્ટ સ્વરૂપમાં મેળવવા માટે સમી.(29) પર આવો.

$$\cos\theta_L = \frac{\cos\theta_c + \gamma}{(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{------(33)}$$

$$\frac{d\,(\sin\theta_L\,)}{d\,(\sin\theta_C\,)} = \frac{1}{(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\cos\theta_c + \gamma)\cdot(2\gamma)}{2(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2\right) - (\cos\theta_c + \gamma)\gamma}{(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2 - \gamma\cos\theta_c - \gamma^2}{(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d\,(\sin\theta_L\,)}{d\,(\sin\theta_C\,)} = \frac{1+\gamma\cos\theta_c}{(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{------(34)}$$

આ સમી. નો ઉપયોગ સમી.(32) માં કરતાં

$$\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\;\frac{\left(1+2\gamma\cos\theta_c + \gamma^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1+\gamma\cos\theta_c} \quad \text{------(35)}$$

ખાસ કિસ્સો :

જ્યારે **γ = 1 હોય ત્યારે, સમી.(26) માં જોયું કે** $\theta_L = \frac{\theta_c}{2}$ હોય છે.

સમી. (35) માં **γ = 1** લેતા

$$\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\;\frac{(1+2\cos\theta_c + 1\,)^{\frac{3}{2}}}{1+\cos\theta_c}$$

$$= \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\;\frac{(2+2\cos\theta_c\,)^{\frac{3}{2}}}{1+\cos\theta_c}$$

$$= \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'}\;\frac{\{2(1+\cos\theta_c\,)\}^{\frac{3}{2}}}{1+\cos\theta_c}$$

$$= \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'} \; \frac{\left\{2 \cdot 2\, cos^2 \frac{\theta_c}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{2\, cos^2 \frac{\theta_c}{2}}$$ અહી $1 + \cos\theta_c = 2\, cos^2 \frac{\theta_c}{2}$ લેતા,

$$= \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'} \; \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot (2\, cos^2 \frac{\theta_c}{2})^{\frac{3}{2}}}{2\, cos^2 \frac{\theta_c}{2}}$$

$$= \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'} \; 2\sqrt{2} \cdot (2\, cos^2 \frac{\theta_c}{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'} \; 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\theta_c}{2}$$

$$\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'} \; 4 \cos\frac{\theta_c}{2} \quad \text{---}(36)$$

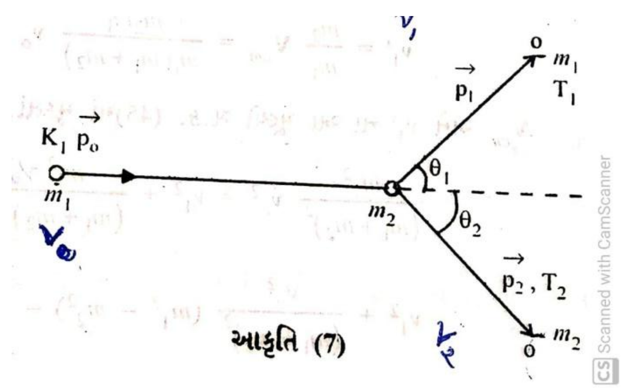
અથવા

$$\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{d\sigma(\theta_c)}{d\,\Omega'} \; 4 \cos\theta_L$$

અહી **γ = 1 હોય ત્યારે,** $\theta_L = \frac{\theta_c}{2}$ નો ઉપયોગ કરેલ છે.

8. પ્રયોગશાળા (L) પધ્ધતિમાં સ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણનનું શુધ્ધ ગતિવિજ્ઞાન અને ગતિઊર્જાના ફેરફાર:

આકૃતિ (7) માં દર્શાવ્યા મુજબ, m_1 દ્રવ્યમાનવાળો એક કણ K_1 જેટલી ગતિઊર્જા સાથે ગતિ કરતો કરતો m_2 દ્રવ્યમાનવાળા કણ વડે θ_1 કોણે પ્રકિર્ણન અનુભવી T_1 ગતિઊર્જા સાથે ગતિ કરે છે. m_2 દ્રવ્યમાનવાળો ટાર્ગેટ કણ જે પ્રારંભમાં સ્થિર છે, તે T_2 ગતિઊર્જા સાથે θ_2 દિશામાં રીકોઇલ થાય છે. આપણે L યામ પધ્ધતિમાં આ ઘટનાનો વિચાર કરીશું.



આકૃતિ (7)

રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર,

$$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} \quad \text{--}(43)$$

સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ હોવાથી ગતિઊર્જાના સંરક્ષણનો ઉપયોગ કરી શકાય.

$$K_1 = T_1 + T_2 \quad \text{--}(44)$$

રેખીય વેગમાનના ત્રણ ઘટકોના રૂપમાં વિચારતાં સ.ક. (43) કુલ ત્રણ સમીકરણો દર્શાવે છે. આમ, સમી (43) અને સ.ક.(44) કુલ ચાર સમીકરણો છે. પ્રયોગશાળામાં આવા પ્રયોગમાં K_1 , અને $\overrightarrow{p_0}$ જેટલી અનુક્રમે ગતિઊર્જા અને રેખીય વેગમાન સાથે આપાતકણને ટાર્ગેટ કણ તરફ ગતિ કરાવવામાં આવે છે અને જુદા જુદા, θ_1 ખૂણે આવતા $\overrightarrow{p_1}$ વેગમાન અને T_1 ગતિઊર્જા ધરાવતા પ્રકિરણિત કણોની નોંધ લેવામાં આવે છે. ગણિતિયવાદમાં P_1 , P_0 T_1 , અને K_1 ,

વચ્ચેના સંબંધો મેળવવામાં આવે છે. આમ, સ.ક.(43) અને (44) માં P_{0x} ,P_{0y} અને Poz ,K_1 ,અનેθ_1 જ્ઞાત હોય છે. તેના પરથી P_1 મેળવવાનો હોય છે. આથી, સ.ક. (43) અને સ.ક. (44) માંથી P_2 અને T_2 , નો લોપ કરવો જોઇએ. આપણે આવું કરવાને બદલે સીધેસીધો P_1 , P_0 અને , θ_1 વચ્ચેનોસંબંધ આપણી, અગાઉની ચર્ચા પરથી કરી શકીશુ.

આકૃતિ (5) જુઓ :

ΔADE ને કોસાઈનનો નિયમ લગાડતાં,

$$v_1'^2 = v_1^2 + V_{cm}^2 - 2v_1 V_{cm} \cos\theta_L \text{ ------------ (45)}$$

પણ સ.ક. (7) પરથી

$$V_{cm} = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \text{ ------------ (46)}$$

અને સ.ક. (23) પરથી

$$v_1' = \frac{m_2}{m_1} V_{cm} = \frac{m_2 m_1}{m_1(m_1+m_2)} v_0 = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} v_0 \text{ ------------ (47)}$$

V_{cm} અને v_1'ના આ મૂલ્યો સ.ક. (45) માંમૂકતાં,

$$\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} v_0^2 = v_1^2 + \frac{m_1^2 v_0^2}{(m_1+m_2)^2} - 2v_1 \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \cos\theta_L$$

$$v_1^2 + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} v_0^2 - \frac{m_2^2 v_0^2}{(m_1+m_2)^2} - 2v_1 \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \cos\theta_L = 0$$

$$v_1^2 - \frac{v_0^2}{(m_1+m_2)^2} (m_2^2 - m_1^2) - 2v_1 \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \cos\theta_L = 0$$

$$v_1^2 - \frac{v_0^2}{(m_1+m_2)^2} (m_2 - m_1)(m_2 + m_1) - 2v_1 \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \cos\theta_L = 0$$

$$v_1^2 - \frac{v_0^2}{(m_1+m_2)} (m_2 - m_1) - 2v_1 \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \cos\theta_L = 0 \text{ ------------ (47,a)}$$

ઉપરોક્ત સમી. ને v_0^2 વડે ભાગતા

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right) - 2\left(\frac{v_1}{v_0}\right) \frac{m_1}{m_1+m_2} \cos\theta_L = 0$$

અહી $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ હોવાથી

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{1-\frac{m_1}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

(m_2 વડે ઉપર અને નીચે ભાગતા તથા γ ની કિમત મૂકતાં)

$$\frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{\frac{m_1}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}} = \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

(m_2 વડે ઉપર અને નીચે ભાગતા તથા γ ની કિમત મૂકતાં)

હવે $\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$ અને $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ ની કિમત સમી.(47,a) માં મૂકતાં

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right) - 2\left(\frac{v_1}{v_0}\right) \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) \cos\theta_L = 0$$

$$\therefore \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - 2\left(\frac{v_1}{v_0}\right)\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\cos\theta_L - \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right) = 0 \text{-------------------------------} (48)$$

આ સમીકરણ $\left(\frac{v_1}{v_0}\right)$ માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

ખાસ કિસ્સાઓ :

જો γ = 1 હોયતો,

$$\therefore \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{v_1}{v_0}\right)\cos\theta_L = 0$$

$$\frac{v_1}{v_0}\left(\frac{v_1}{v_0} - \cos\theta_L\right) = 0$$

$$\therefore \frac{v_1}{v_0} - \cos\theta_L = 0$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \cos\theta_L$$

$$v_1 = v_0\cos\theta_L$$

જો $\theta_L = \frac{\pi}{2}$ લઈએ તો ઉપરના સમી. પ્રમાણે $v_1 = 0$ થાય. આવી સ્થિતિમાં આપાતકણની સમગ્ર ગતિઊર્જા રીકોઈલ કણને મળે છે સમી. (26) પરથી તમે જોઈ શકશો કે આ કિસ્સામાં $\theta_c = \pi$ બનશે. અર્થાત્ C.M.— પધ્ધતિમાં જયારે આપાતકણ back – પ્રકિર્ણન અનુભવે છે ત્યારે આપાતકણની સમગ્ર ગતિઊર્જા રીકોઇલ કણને મળે છે. આ હકીકતનો ઉપયોગ ન્યુક્લિયર રીએક્ટરમાં મોડરેશન ક્રિયામાં કરવામાં આવે છે, જેમાં ઝડપી ન્યુટ્રોન મોડરેટર દ્રવ્યના કણો વડે પ્રકિર્ણન પામે છે ત્યારે સારા પ્રમાણમાં ગતિઊર્જા ગુમાવીને ધીમા પડે છે.

(ii) જો γ >> 1 એટલે કે $m_1 >> m_2$, એટલેકે γ >>> 1 છે .

જો આ કિસ્સામાં પણ , $\theta_{L\,(\max)}$ હોય તો ,

$$\cos\theta_L = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} = 1$$

$\therefore \theta_L = 0$ એટલે કે આપાતકણ , ટાર્ગેટકણની સાપેક્ષમાં ખૂબજ ભારે હોય તો આપાતકણનું શૂન્યકોણે પ્રકિર્ણન થાય છે . આમ થવું સ્વાભાવિક છે

(iii) જો γ > 1 એટલે કે $m_1 > m_2$

આ કિસ્સામાં γ એક કરતાં ખૂબ જ મોટો નથી. આવી સ્થિતિમાં γ ની સરખામણીમાં 1 , ને ન અવગણી શકાય. પણ γ^2 ની સરખામણીમાં 1 ને અવગણી શકાય.)

અહીં પણ આપણે $\theta_{L\,(\max)}$ વાળો ખાસ કિસ્સો લઇશું. આ હકીકત સાથે ,

$$\cos\theta_L = \frac{(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\gamma} = \frac{\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\gamma} = \left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2\gamma^2} = 1$$

$$\therefore \cos\theta_L = 1 \text{--} (49)$$

વળી $\frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{\gamma}{\gamma(1+\frac{1}{\gamma})} = (1+\frac{1}{\gamma})^{-1} = 1 - \frac{1}{\gamma}$ --(50)

તથા, $\frac{1-\gamma}{1+\gamma} = -\frac{\gamma-1}{1+\gamma} = -\frac{\gamma(1-\frac{1}{\gamma})}{\gamma(1+\frac{1}{\gamma})} = -(1-\frac{1}{\gamma})(1+\frac{1}{\gamma})^{-1}$

$$= -(1-\frac{1}{\gamma}) \cdot (1-\frac{1}{\gamma})$$

$$= -(1-\frac{1}{\gamma})^2 \quad \text{--------------------------------------(51)}$$

સમી. (49) , (50) અને (51) નો ઉપયોગ સમી.(48) માં કરતાં,

$$\therefore \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - 2\left(\frac{v_1}{v_0}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^2 = 0 \quad \text{------------------------(52)}$$

$$\therefore \left\{\frac{v_1}{v_0} - \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right\}^2 = 0$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{--------------------------------------(53)}$$

$$v_1 = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right) v_0$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^2 v_0{}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(1-\frac{2}{\gamma}\right) v_0{}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_0{}^2 - \frac{m_1 v_0{}^2}{\gamma}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_0{}^2 - \frac{m_1 m_2 v_0{}^2}{m_1}$$

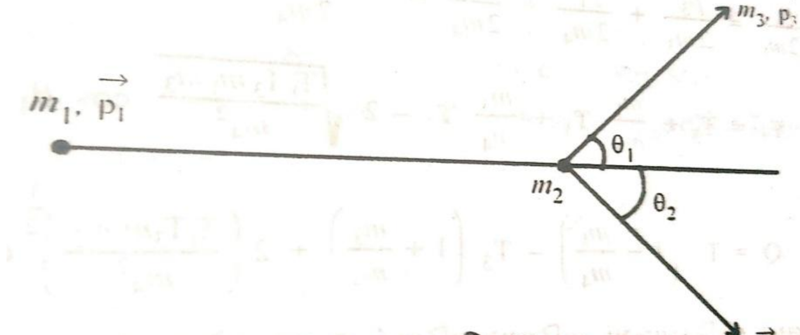
$$= \frac{1}{2} m_1 v_0{}^2 - m_2 v_0{}^2 \quad \text{--------------------------------------(54)}$$

આમ , આ કિસ્સામાં આપાતકણ $m_2 v_0{}^2$ જેટલી ગતિ ઊર્જા ગુમાવે છે.

9. અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણન : (ગતિ વિજ્ઞાન)

આવા પ્રકિર્ણનની વ્યાખ્યા આપણે અગાઉ આપી દીધી છે જયારે બે કણો એકબીજા સાથે અથડાય અને પરિણામ સ્વરૂપ બે નવા જ કણો ઉદ્ભવીને જુદી જુદી દિશામાં ગતિ કરવા લાગે તો તેવી ઘટના પણ અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણન જ કહેવાય.આકૃતિ (8) જુઓ.

અહી m_1 દળવાળો કણ, $\overrightarrow{p_1}$ વેગમાનથી જ્યારે m_2 દળવાળા સ્થિર કણ સાથે અથડાય છે. ત્યારે m_3 અને m_4 દળવાળા બે નવા જ કણો અનુક્રમે $\overrightarrow{p_3}$ અને $\overrightarrow{p_4}$ વેગમાનથી ગતિ કરતાં મળે છે. અહી પણ આપણે પ્રયોગશાળા પધ્ધતિનો ઉપયોગ કરીશું.



આકૃતિ (8)

અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણનમાં રેખીય વેગમાંના સંરક્ષણનો નિયમ તો વાપરી જ શકાય.

$$\therefore \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4} \quad \text{-----(55)}$$

આ ઘટનામાં ગતિ ઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું નથી,

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_4^2}{2m_4} + Q \quad \text{-----(56)}$$

અહી Q ધન કે ઋણ ગમે તે હોઇ શકે. જો $Q < 0$ હોયતો અંતિમ ગતિઊર્જા પ્રારંભિક ગતિઊર્જા કરતાં વધારે હોય. આમ, આ પ્રક્રિયામાં આપણને વધારાની (ખર્ચી હોય તેના કરતાં) ઊર્જા બોનસરૂપે મળે છે. આવી પ્રક્રિયાને ઊર્જાક્ષેપક પ્રક્રિયા કહે છે . જો $Q > 0$ હોય તો અંતિમ ગતિઊર્જા , પ્રારંભિક ગતિઊર્જા કરતાં ઓછી હોય છે . આવી પ્રક્રિયામાં આપણે કંઈક ઉર્જા ગુમાવીએ છીએ . આવી પ્રક્રિયાને ઊર્જાશોષક પ્રક્રિયા કહેવાય છે .

મોટાભાગના પ્રકિર્ણન પ્રયોગોમાં p_1, p_3 **અને** θ_1 માપી શકાય છે . આથી , આપણા અંતિમ પરિણામો આ રાશિઓના સંદર્ભમાં હોવા જોઈએ . આમ કરવા માટે આપણે સમીકરણ (55) અને (56) માંથી p_4 **નો** લોપ કરીશું .

$$\overrightarrow{p_4} = \overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_3}$$

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3 \cos\theta_1 \quad \text{-----(57)}$$

(અહી p_1 અને p_3 વચ્ચેનો ખુણોθ_1 છે. ભૂમિતિનો ઉપયોગ કરતાં)

p_4^2 નું આ મૂલ્ય સમી . (56) માં મૂકતાં,

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_1^2}{2m_4} + \frac{p_3^2}{2m_4} - \frac{2p_1p_3 \cos\theta_1}{2m_4} + Q$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_1^2}{2m_4}\left(\frac{m_1}{m_1}\right) + \frac{p_3^2}{2m_4}\left(\frac{m_3}{m_3}\right) - \frac{2p_1p_3 \cos\theta_1}{2m_4}\left(\frac{\sqrt{2m_1}}{\sqrt{2m_1}} \times \frac{\sqrt{2m_3}}{\sqrt{2m_3}}\right) + Q$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_3^2}{2m_3} + \left(\frac{m_1}{m_4}\right)\frac{p_1^2}{2m_1} + \left(\frac{m_3}{m_4}\right)\frac{p_3^2}{2m_3} - 2\,\frac{p_1}{\sqrt{2m_1}}\,\frac{p_3}{\sqrt{2m_3}}\left(\frac{\sqrt{2m_1}\sqrt{2m_3}}{2m_4}\right)\cos\theta_1 + Q$$

અહી $\frac{p_1^2}{2m_1} = T_1, \frac{p_3^2}{2m_3} = T_3$ મૂકતાં,

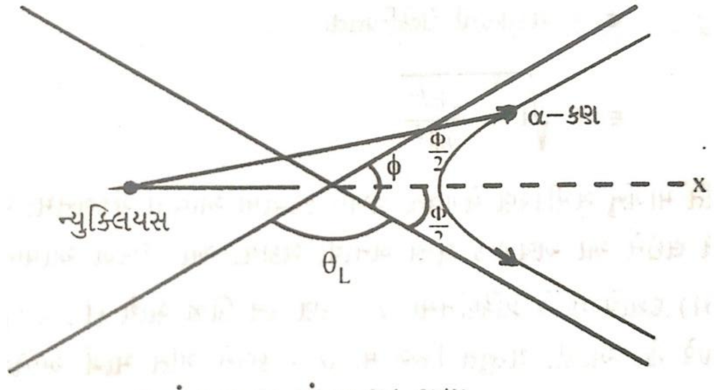
$$T_1 = T_3 + \left(\frac{m_1}{m_4}\right)T_1 + \left(\frac{m_3}{m_4}\right)T_3 - 2\sqrt{\frac{T_1T_3m_1m_3}{m_4^2}}\cos\theta_1 + Q$$

$$\therefore Q = T_1 - \left(\frac{m_1}{m_4}\right)T_1 - T_3 - \left(\frac{m_3}{m_4}\right)T_3 + 2\left(\frac{T_1T_3m_1m_3}{m_4^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_1$$

$$\therefore Q = T_1\left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - T_3\left(1 - \frac{m_3}{m_4}\right) + 2\left(\frac{T_1T_3m_1m_3}{m_4^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_1 \quad \text{-----(58)}$$

ઘણીવાર ન્યુક્લિયર ભૌતિકશાસ્ત્રમાં ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયાનું મૂલ્ય શોધવામાં આ સમીકરણનો ઉપયોગ થાય છે. Q મૂલ્યની ગણતરી કરીને, અમુક ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયા થશે કે નહિ તે જાણી શકાય છે.

10.રૂથરફોર્ડ પ્રકિર્ણન:



આકૃતિ (9)

રૂથરફોર્ડ α – કણના, ન્યુક્લિયસ વડે થતા પ્રકિર્ણનનો અભ્યાસ કર્યો હતો તે તો તમે જાણો જ છો. આવા પ્રકિર્ણનના કિસ્સામાં, આપણે પ્રસ્તુત લેખમાં ડીફરનશીયલ આડછેદનું સૂત્ર મેળવીશું.

આકૃતિ(9)માં Ze વિધુતભારવાળા ભારે ન્યૂક્લિયસ વડે Z'e વિધુતભારવાળો α કણ પ્રકીર્ણન પામતો દર્શાવ્યો છે. યંત્રશાસ્ત્રની દ્રષ્ટિએ કહીએ તો પ્રશ્ન માત્ર આ છે. : Z'e વિધુતભાર વડે ઉદ્ભવતા વિધુતક્ષેત્રમાં અમુક ઉર્જા (ધારો કે,E) ધરાવતા અને Ze વિધુતભાર ધરાવતા કણનો ગતિપથ કેવો હોય છે?

અત્રે બે કણો વચ્ચે લાગતું કુલમ્બબળ F = $\frac{ZZ'e^2}{r^2}$ છે.આમ આ કોયડો કેન્દ્રીયબળનો છે.

હવે, F. Y. BSc ના અભ્યાસ દરમિયાન આપણે જોયું કે કેન્દ્રીયબળની અસર હેઠળ ગતિ કરતાં કણનો ગતિમાર્ગ વ્યાપક રીતે શંકુ-છેદ હોય છે. આવું શંકુ છેદનું સમીકરણ આપણે F. Y. BSc માં મેળવ્યું હતું: (નીરવ પ્રકાશન ફિઝિક્સ 202 , ચેપ્ટર: કેન્દ્રીય બળની અસર હેઠળ કણની ગતિમાં પેજ 74 સમી. (46))

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1+\epsilon\cos(\theta-\theta_0)) \quad \text{------(59)}$$

જ્યાં, m = બળક્ષેત્રમાં ગતિ કરતાં કણનું દળ (અત્રે α કણનું દળ)

l = યામપદ્ધતિના (અત્રે r ,θ યામપદ્ધતિ) ઉદ્ગમબિન્દુને અનુલક્ષીને ગતિમાન કણનું કોણીય વેગમાન

અહી <u>θ =કણનો કોણીયયામ છે. તે પ્રકીર્ણન કોણ નથી.</u>

k = બળનો અચલાંક , જ્યાં F = - $\frac{k}{r^2}$

આપણા કિસ્સામાં,

F = $\frac{ZZ'e^2}{r^2}$ હોવાથી (ઉપરના સમીકરણ પરથી)

$$K = -ZZ'e^2 \quad \text{------(60)}$$

ϵ = શંકુછેદની ઉતકેન્દ્રીતા (નીરવ પ્રકાશન ફિઝિક્સ 202 , ચેપ્ટર: કેન્દ્રીય બળની અસર હેઠળ કણની ગતિમાં પેજ 72 સમી. (44))

$$\epsilon = \sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}} \quad \text{------(61)}$$

θ_0 = ગતિમાર્ગનું સમીકરણ મેળવતી વખતે કરવામાં આવતા સંકલનમાં આવતો સંકલાંનો અચળાંક , યોગ્ય યામપદ્ધતિ લઈને આ અચળાંક શૂન્ય બનાવી શકાય. આ દ્રષ્ટિએ આપણે θ_0 =0 લઈશું.

સમી.(61) દર્શાવે છે કે પ્રકીર્ણનમાં α કણને ધન ઉર્જા સાથે (E, ધન) ગતિ કરતો હોવાથી, ϵ નું મૂલ્ય 1 કરતાં વધારે છે. આથી પ્રસ્તુત કિસ્સામાં α કણને ગતિમાર્ગ અતિવલય છે.

θ_0 =0 લઈને, સમી. (60) અને (61) નો ઉપયોગ સમી. (59) માં કરતાં

$$\frac{1}{r} = \frac{m}{l^2}(-ZZ'e^2)(1+\in\cos\theta)$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{mZZ'e^2}{l^2}(1+\in\cos\theta) \text{--(62)}$$

હવે, જો આપતકણનો વેગ v_O હોય અને સંઘાત પ્રાચલ s હોય તો, કોણીયવેગમાન ($\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$= r × mv =mvr, જ્યાં p=mv રેખીય વેગમાન r અને p વચ્ચેનો કોણ 90^0 છે. આપના કેસમાં r = s સંઘાત પ્રચાલ, v = v_0 છે.)

$$l = mv_Os \text{---(63)}$$

પણ, $E = \frac{(mv_O)^2}{2m}$ (અહી $E=\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m}$)

$\therefore$ $mv_O = \sqrt{2mE}$

$\therefore$ $l = \sqrt{2mE}\,s$ (s વડે બંને બાજુ ગુણી mv_Os =l મૂકતાં)-------------------------------(64)

l નું આ મૂલ્ય સમી. (61)માં મૂકતાં

$$\epsilon = \left[1 + \frac{2E\ 2mEs^2}{m\,z^2 z'^2 e^4}\right]^{\frac{1}{2}} \text{--(65)}$$

સમી. (65) માં આપણે સમી.(60) નો ઉપયોગ કર્યો છે.

$$\epsilon = \left[1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{---(66)}$$

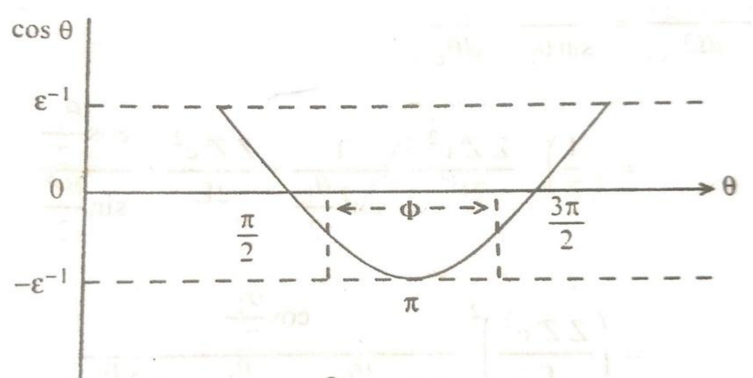
સમી.(62)માં જમણી બાજુ ઋણ ચિહ્ન છે. આમ હોવાને કારણે θ ના મૂલ્યો પર નિયંત્રણ આવે છે.સમી.(62) માં ડાબી બાજુ ધન હોવાથી ,

$$1+\in\cos\theta < 0$$

$$\therefore \in\cos\theta < -1$$

$$\therefore \cos\theta < -\frac{1}{\in} \text{---(67)}$$

આકૃતિ (10) માં θ ના શક્ય મૂલ્યોનો વિસ્તાર દર્શાવ્યો છે . આ આકૃતિમાં , જેમાં cosθ નું મૂલ્ય - $\frac{1}{\in}$ કરતાં ઓછું હોય તેવો કોણીય વિસ્તાર φ દર્શાવ્યો છે .



આકૃતિ (10)

હવે , આકૃતિ (9) જુઓ . અત્રે α – કણ અનંત અંતરેથી E જેટલી ઊર્જા સાથે ન્યુક્લીયસ તરફ આવે છે , તેનું પ્રકિર્ણન થાય છે. અને તેની પ્રારંભિક ગતિની દિશા તથા અંતિમ ગતિની દિશા વચ્ચેનો કોણ θ છે .

આ પ્રકિર્ણનકોણ ,

$$\theta_L = \pi - \varphi \text{---(68)}$$

$\frac{\theta_L}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$,∴ $\sin\frac{\theta_L}{2}$ = $\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2})$=$\cos\frac{\varphi}{2}$ =cos θ = $\frac{1}{\in}$, નીચે $\frac{\varphi}{2}$ = θ, અને સમી.(67) પ્રમાણે)

,જ્યાં φ = અતિવલયના asymptotes વચ્ચેનો કોણ , જે θ ના શક્ય મૂલ્યોનો વિસ્તાર હોય છે . જો સમી. (67) માં $<$ ના ચિહ્નને બદલે = નું ચિહ્ન મૂકીએ તો θ નો શક્ય વિસ્તાર દર્શાવતો કોણ $\frac{\varphi}{2}$ મૂકવો જોઇએ . સમી.(67) થી મળતા બાકીના બધા શક્ય θ એ $\frac{\varphi}{2}$ કરતાં નાના જ હોય .

$$\therefore \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = +\frac{1}{\epsilon} \text{ (મૂલ્યમાં)} \qquad (69)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = \frac{1}{\epsilon} \text{ (સમી. 68 પરથી)} \qquad (70)$$

$$\therefore \cot^2\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta_L}{2}\right) - 1 = \epsilon^2 - 1 = 1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2 - 1 \qquad (71)$$

$$\therefore \cot^2\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2$$ ઉપરના સમી. માં સમી.(66) માંથી ϵ^2 નું મૂલ્ય મૂકેલ છે.

$$\therefore \cot\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = \frac{2Es}{ZZ'e^2}$$

$$\therefore s = \frac{ZZ'e^2}{2E}\cot\left(\frac{\theta_L}{2}\right) \qquad (72)$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta_L} = \frac{ZZ'e^2}{2E}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta_L}{2}\right)\left(\frac{\theta_L}{2}\right)$$

$$\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{s}{\sin\theta_L}\frac{ds}{d\theta_L}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{ZZ'e^2}{2E}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta_L}{2}\right)}\frac{ZZ'e^2}{2E}\frac{\cos\left(\frac{\theta_L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_L}{2}\right)}\frac{1}{\sin\theta_L}$$

ઉપરના સમીકરણમાં $\sin\theta_L = 2\sin\left(\frac{\theta_L}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_L}{2}\right)$ મૂકતાં,

$$= \left(\frac{ZZ'e^2}{E}\right)^2 \frac{\cos\left(\frac{\theta_L}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{\theta_L}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_L}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_L}{2}\right)}$$

$$\frac{d\sigma(\theta_L)}{d\,\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2\,E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta_L}{2}\right)} \qquad (73)$$

સમી. (73) એ રૂથરફર્ડના α –કણ પ્રકિર્ણનમાં મળતો ડિફરન્શીયલ આડછેદ દર્શાવે છે. આ સૂત્ર પરથી જો કુલ આડછેદ મેળવવામાં આવેતો એક રસપ્રદ પરિણામ પ્રાપ્ત થાય છે .

કુલઆડછેદ ,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\,\Omega}\sin\theta_L d\theta_L d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2\,E}\right)^2 \int_0^{\pi}\frac{2\sin\left(\frac{\theta_L}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_L}{2}\right)d\theta_L}{\sin^4\left(\frac{\theta_L}{2}\right)}$$

$\sin\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = t$ આદેશ લઈને આ સંકલન મેળવી શકાય તમે તે મેળવો. અને જુઓ કે આ સંકલનનું મૂલ્ય ∞ આવે છે.આ અનંતનો ભૌતિક અર્થ શો?

પ્રથમ તો સમજો કે કુલ પ્રકિર્ણન આડછેદ એટલે એકમ આપાત ફલક્સ દીઠ , એકમ સમયમાં બધી જ દિશાઓમાં પ્રકિર્ણન પામતા કણોની સંખ્યા . હવે , પ્રસ્તુત કોયડામાં આપણે કુલમ્બ બળો લીધા છે . આ અંતરી બળો છે . અનંત અંતરે (ભૌતિક

રીતે અતિ લાંબા અંતરે) આ બળોને , ભલેને નહિવત પણ કંઈક અસર તો હોય જ છે. આવી સ્થિતિમાં અતિ લાંબા અંતરે પણ પ્રકીર્ણન અસર થાય જ છે. આથી અનંત આડછેદ ધરાવતી કણોની કિરણાવલિમાં રહેલા બધા જ કણોનું કોઈને કોઈ ખૂણે પ્રકિર્ણન થાય છે . બીજા શબ્દોમાં ,અનંત આડછેદ ધરાવતી આપાતકણોની કિરણાવલિમાં રહેલા અનંત સંખ્યાના બધાજ કણોનું પ્રકિર્ણન થાય છે . જો બળ લઘુઅંતરી હોયતો s અનંત મળે નહિ .

નોંધઃ આપણે પ્રસ્તુત ચર્ચામાં અપાકર્ષણ પ્રકારના કુલમ્બબળો લીધાં હોત તો કણનો ગતિમાર્ગ અતિવલય જ હોટ પણ તેનું કેન્દ્ર બાહ્ય કેન્દ્ર હોવાને બદલે આંતરિક કેન્દ્ર હોત. જુઓ આકૃતિ (11).

સ્વાધ્યાય

(1) ડિફરન્શીયલ પ્રકિર્ણન આડછેદનું સૂત્ર તારવો .

(2) સ્થિતિસ્થાપક અને અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણન સમજાવો .

(3) રૂથરફોર્ડના પ્રકીર્ણનના પ્રયોગમાં પરમાણુના ન્યુક્લિયસમાંથી થતા α –કણના પ્રકિર્ણન માટે વિકલ આડછેદનું સમીકરણ મેળવો .

(4) સાબિત કરો કે C.M. તંત્રમાં સંઘાત પહેલાં અને પછી કણોના વેગ સરખા હોય છે .

(5) પ્રયોગશાળા યામપદ્ધતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર યામપદ્ધતિ વિશે ચર્ચા કરો .

(6) L યામપદ્ધતિ અને C.M. યામપદ્ધતિમાં ડિફરન્શીયલ આડછેદ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો .

(7) પ્રયોગશાળા (L– પદ્ધતિ) માં સ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણનનાં ગતિવિજ્ઞાનની ચર્ચા કરો .

(8) અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકિર્ણન સમજાવી ઊર્જાક્ષેપક પ્રક્રિયા અને ઊર્જાશોષક પ્રક્રિયા સમજાવો .