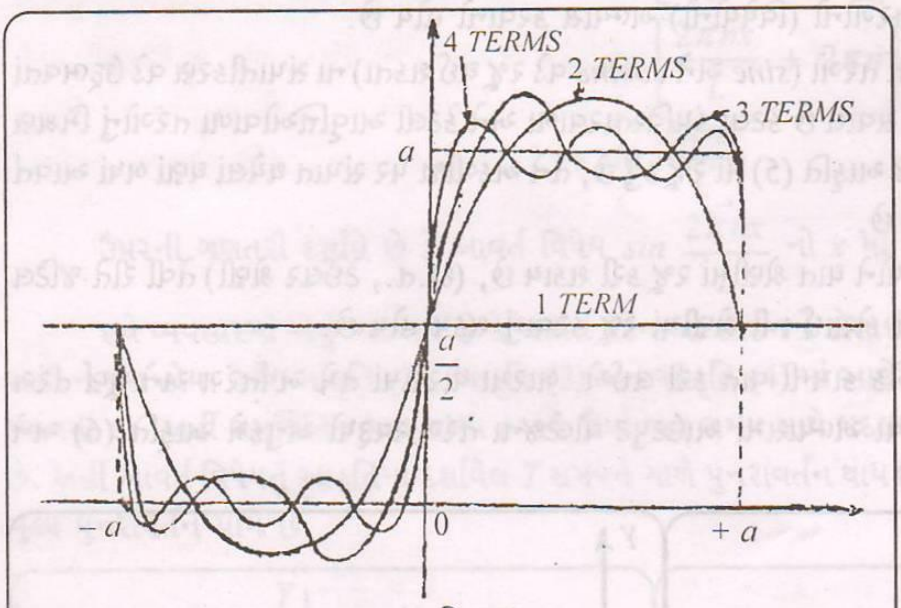
2. એક બીજી અગત્યની વાત :

તમારા અભ્યાસક્રમમાં તમે દ્રવ્ય અને વિકિરણની દ્વૈત પ્રકૃતિ વિષે થોડું શીખશો. ડેવિસન અને જર્મરના પ્રયોગો વડે એવી પ્રાયોગિક સાબિતી પણ મેળવી શકાઈ હતી કે ઈલેક્ટ્રોન જેવા સૂક્ષ્મ કણો (microscopic particles) અમુક સંજોગોમાં તરંગ ગુણધર્મો પણ ધરાવે છે. આવા સંજોગોમાં સૂક્ષ્મ કણની વર્તણૂંક જાણવા માટે તેને તરંગ વિધેય વડે રજૂ કરવું પડે. સૂક્ષ્મ કણને કેવા તરંગ વિધેય વડે દર્શાવવું ? પ્રથમ સાદામાં સાદા વિચાર મુજબ કદાચ આપણને આ હેતુ માટે સરળ આવર્ત તરંગ $sin\ (kx - \omega t)$ વાપરવાનું મન થાય. પણ આવું તરંગ તો x અને t ના અનંત વિસ્તાર (domain) પર પથરાયેલું હોય છે. બીજા શબ્દોમાં, કોઈ નિશ્ચિત સમયે $x = -\infty$ થી $x = +\infty$ સુધી આ તરંગ પથરાયેલું હોય છે. આનો અર્થ એવો થયો કે $x = +\infty$ થી $x = -\infty$ વચ્ચે ગમે ત્યાં કણને નોંધતું સાધન રાખીએ તો તે સાધન કણની હાજરી દર્શાવે. હવે કણ તો મર્યાદિત અવકાશમાં જ રહેલું (localized) હોય તેવી સ્થિતિમાં તે એક જ ક્ષણે બધી જ જગ્યાએ કેવી રીતે નોંધાઈ શકે ? આમ સાદા આવર્ત વિધેય વડે કણને રજૂ કરવાનો વિચાર છોડી દેવો પડે. આમ છતાં, તમે એવા ચોક્કસ સંજોગો ભણશો કે જેમાં નિશ્ચિત વેગમાનવાળા મુક્ત કણને આવા વિધેયથી રજૂ કરવાનું શક્ય બની શકશે. હાલ પૂરતું તો આપણે પ્રાથમિક અવસ્થાની ચર્ચા કરીએ છીએ. ટૂંકમાં ઉપરોક્ત ચર્ચા દર્શાવે છે કે આપણે એવું તરંગ તૈયાર કરવું જોઈએ કે જેની 'તરંગ પ્રવૃત્તિ' અવકાશના જે વિસ્તારમાં કણ હોય તે વિસ્તાર પૂરતી જ મર્યાદિત હોય. એટલે કે આપણને અવકાશના મર્યાદિત વિસ્તારમાં રહેલું (localized) તરંગ જોઈએ છે, અથવા અવકાશના મર્યાદિત વિસ્તારમાં જ પથરાયેલું કોઈ વિધેય જોઈએ છે કે જેમાંની તરંગ પ્રવૃત્તિ કણના દ્વૈત સ્વભાવ સાથે સુસંગત હોય. આવી રચના સમજવા માટે આકૃતિ (8) ધ્યાનમાં લો.



આકૃતિ : 8

આકૃતિ (8) માં દર્શાવેલ વિધેય $\Psi(x)$ એક મર્યાદિત વિસ્તારમાં પથરાયેલું (localized) ચોરસ વિધેય છે. તે $-a$ થી $+a$ સુધીના એક પારિમાણિક વિસ્તારમાં જ છે. આ વિધેય આવર્ત વિધેય નથી, તે તો સ્પષ્ટ જ છે. આમ છતાં, આ વિધેયને અનંત અંતર સુધી પથરાયેલા અને $2a$ આવર્તવાળા અને આ વિધેયના મૂલ્ય જેટલા મહત્તમ સ્થાનાંતરવાળા ચોરસ આવર્ત વિધેયનો એક ભાગ તો જરૂર ગણી શકાય. આ હકીકત એવો નિર્દેશ કરે છે કે સીમિત વિસ્તારમાં રહેલાં વિધેયને પણ સાઈન અને કોસાઈન ઘટકોનું બનેલું ગણી શકાતું હોવું જોઈએ. ફુરિયર શ્રેણીઓના આપણા ખ્યાલોનું વ્યાપકીકરણ કરીશું ત્યારે આપણે જોઈ શકીશું કે, આવાં વિધેયને પણ સતત રીતે ફરતી જતી આવૃત્તિઓવાળા અનંત સંખ્યાના સરળ આવર્ત વિધેયોના સંપાતીકરણ દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે. આકૃતિ (8) માં આ વિધેયને રજૂ કરતાં સરળ આવર્ત ઘટકો દર્શાવ્યા છે. આ ચર્ચા પરથી જોઈ શકાય છે કે જો સૂક્ષ્મ કણની રજૂઆત મર્યાદિત વિસ્તારમાં રહેલાં (localized) તરંગ દ્વારા કરવી હોય તો કણને રજૂ કરતું વિધેય સતત રીતે ફરતી જતી આવૃત્તિઓવાળા અને યોગ્ય

કંપવિસ્તારવાળા સરળ આવર્ત તરંગોના યોગ્ય સંપાતીકરણ વડે મેળવવું જોઈએ. આ રીતે મેળવેલા મર્યાદિત વિસ્તારમાં રહેલાં (localized) તરંગને **તરંગ પેકેટ (wave packet)** કહે છે.

અત્યાર સુધીની ચર્ચા આપણને નિમ્નલિખિત નિચોડ તરફ દોરી જાય છે.

(1) **જેમ જટિલ બૈજિક વિધેયોને તેના સ્વતંત્ર ચલની ઘાત શ્રેણીમાં (દા.ત., ટેઈલર શ્રેણીમાં) વિસ્તારવાનું શક્ય છે તેમ જટિલ આવર્ત વિધેયોને ચોક્કસ શરતો સાથે સાઈન અને કોસાઈનની શ્રેણીઓમાં વિસ્તારી શકાય છે. આ વિસ્તારમાં આવતાં સાઈન અને કોસાઈન પદોની આવૃત્તિ લઘુત્તમથી શરૂ કરી અસતત રીતે વધતી જાય છે.**

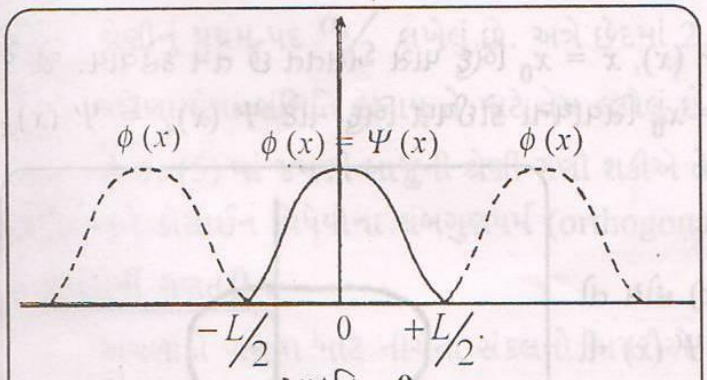
> **કોઈ જટિલ આવર્ત વિધેયને તેના *sine* અને *cosine* ઘટકોમાં વિભાજીત કરવાની ગણિતીય પ્રક્રિયાને Harmonic analysis કહે છે.**

(2) **જેમની આવૃત્તિઓ સતત રીતે ફરતી જતી હોય એવા સરળ આવર્ત વિધેયો (*sine* અને *cosine*) ના યોગ્ય કંપવિસ્તારો લઈને, તેમના સંપાતીકરણ વડે અવકાશના મર્યાદિત વિસ્તારમાં રહેલું (localized) વિધેય તૈયાર કરી શકાય છે. આ રીતે તૈયાર કરેલ તરંગ પેકેટ (wave packet) ડી-બ્રોગ્લીના દ્રવ્ય તરંગો અને પરિણામે સૂક્ષ્મ કણોને રજૂ કરવાની ક્ષમતા ધરાવે છે.**

આપણે આવર્ત વિધેયોને રજૂ કરતી *sine* અને *cosine* પદોની જે શ્રેણીની વાત કરી રહ્યા છીએ તેને ફુરિયર શ્રેણીઓ કહે છે. હવે આપણે ફુરિયર શ્રેણીઓનો સચોટ અભ્યાસ શરૂ કરીએ. આપણે જે ચોક્કસ હેતુ માટે આ અભ્યાસ કરીએ છીએ તે હેતુને અનુલક્ષીને જ આ અભ્યાસની શરૂઆત કરીશું. આ અર્થમાં શુદ્ધ ગણિતશાસ્ત્રના પુસ્તકમાં જે રીતે જે પ્રકારનાં આવર્ત વિધેયોથી આ અભ્યાસની શરૂઆત કરાય છે તેના કરતાં આપણે સહેજ જુદા ''પ્રકાર'' ના વિધેયથી શરૂઆત કરીશું.

3. ફુરિયર શ્રેણીઓ :

ધારો કે $\phi(x)$ એક આવર્ત વિધેય છે. આ વિધેયનો આવર્ત L છે. જુઓ આકૃતિ (9).



આકૃતિ : 9

$$\therefore \quad \phi(x) = \phi(x + L) \quad \ldots(4)$$

હવે, જો $\phi(x)$ એ $-L/2$ અને $+L/2$ વચ્ચે

(*i*) એક મૂલ્ય (single valued)

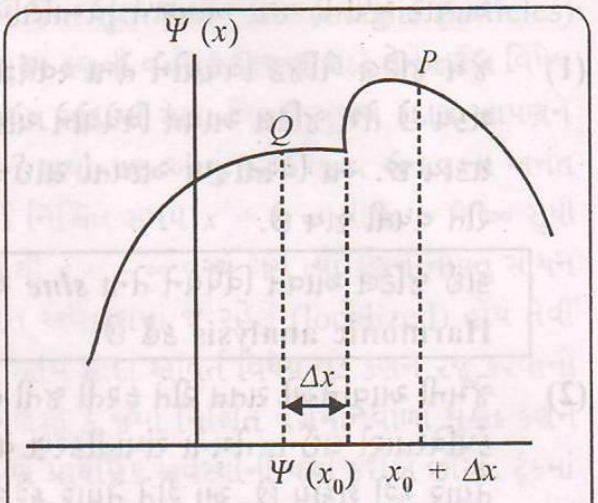
(*ii*) પરિમિત (finite) હોય, અને

(*iii*) તેને એક આવર્તમાં (L માં) જો પરિમિત સંખ્યામાં અસાતત્ય હોય અને પરિમિત સંખ્યામાં મહત્તમો તથા ન્યૂનતમો હોય.

આ શરતો, કે જેને ડીરીક્લેટની શરતો કહે છે, તેની હેઠળ $\phi(x)$ ને સંપૂર્ણ આવર્તમાં અને તેથી $x = -\infty$ થી $x = +\infty$ ના વિસ્તારમાં ફક્ત અસાતત્યના બિંદુઓ બાદ કરતાં, સાઈન અને કોસાઈનની શ્રેણીના પદમાં રજૂ કરી શકાય છે. આ સાઈન અને કોસાઈન વિધેયોની આવૃત્તિઓ એક મૂળભૂત આવૃત્તિના પૂર્ણ ગુણાંક રૂપે હોય છે. આવી શ્રેણીઓને તેના શોધકના નામ પરથી ફુરિયર શ્રેણીઓ કહે છે. અસાતત્યના બિંદુ પાસે $\phi(x)$ નું મૂલ્ય, અસાતત્યની બંને બાજુનાં શ્રેણીના મૂલ્યના સરેરાશ બરાબર હોય છે.

❒ ડિરીક્લેટ શરતોની સમજૂતી :

આવર્ત વિધેયોનો એક મોટામાં મોટો ફાયદો એ છે કે એક વખત તે એક આવર્તમાં સુવ્યાખ્યાયિત થઈ જાય (well defined) પછી તેના પુનરાવર્તન માત્રથી બધા જ વિસ્તારમાં તેની ગણતરી કરી શકાય.



આકૃતિ : 10

ધારો કે આકૃતિ (10) માં $\Psi(x)$ એક $-L/2$ થી $+L/2$ વિસ્તારમાં સુવ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. વળી, તે પરિમિત (finite bounded) છે. હવે, જો $\Psi(x)$ વિધેય x ના કોઈ મૂલ્ય માટે પરિમિત અસાતત્ય ધરાવતું હોય તો, x ના તે મૂલ્ય માટે પરિમિત કૂદકો લગાવતું હોય. જુઓ આકૃતિ (10). આકૃતિમાં $x = x_0$ બિંદુ અસાતત્યનું બિંદુ છે. $x = x_0$ પાસે $\Psi(x)$ નાં બે લક્ષ મૂલ્યો (limiting values) નીચે મુજબ શોધી શકાય.

જમણી બાજુથી x_0 તરફ જવું :

$x = x_0$ ની જમણી બાજુ P બિંદુ માટે $x = x_0 + \Delta x$. આ બિંદુ પાસે $\Psi(x)$ નું મૂલ્ય $\Psi(x_0 + \Delta x)$ છે.

$$\therefore \quad \Psi(x_0)_+ = \lim_{\Delta x \to 0} \Psi(x_0 + \Delta x) \qquad ....(A)$$

ડાબી બાજુથી x_0 તરફ જવું :

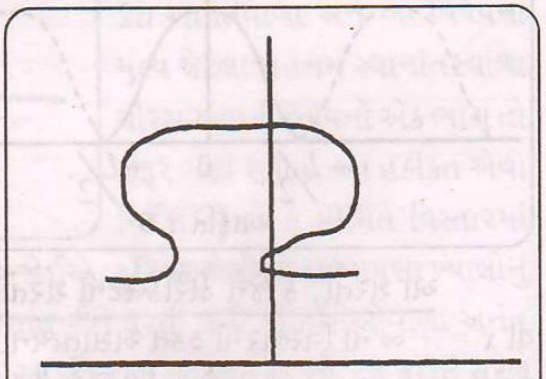
Q બિંદુ પાસે $\quad \Psi(x) = \Psi(x_0 - \Delta x)$

$$\therefore \quad \Psi(x_0)_- = \lim_{\Delta x \to 0} \Psi(x_0 - \Delta x) \qquad ....(B)$$

જો $\Psi(x_0)_+ \neq \Psi(x_0)_-$ હોય, તો વિધેય $\Psi(x)$, $x = x_0$ બિંદુ પાસે અસતત છે તેમ કહેવાય. જો કે આકૃતિ (10) માં આપણે જે $\Psi(x)$ લીધું છે તે $x = x_0$ સિવાયના કોઈપણ બિંદુ માટે $\Psi(x)_+ = \Psi(x)_-$ હોવાથી સતત છે.

વિધેયની એકમૂલ્યતાની સમજૂતી :

આકૃતિ (11) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું જો $\Psi(x)$ હોય તો તે એક મૂલ્ય નથી, કારણ કે x ની અમુક કિંમતો માટે $\Psi(x)$ ની એક કરતાં વધારે કિંમતો મળે છે.


આકૃતિ : 11

વિધેયની પરિમિતતા (Finiteness of the function) :

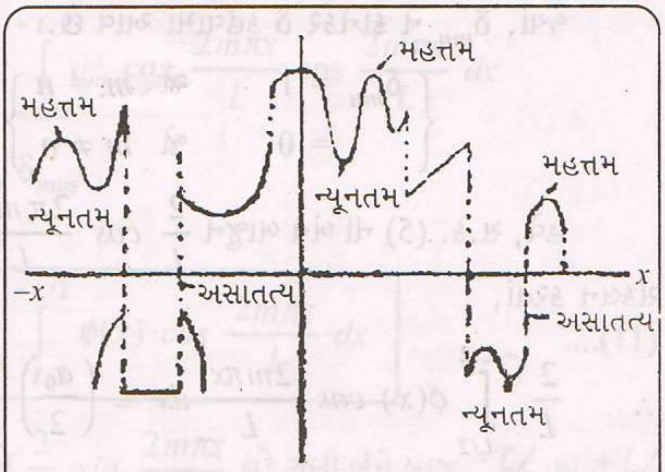
જો x નાં બધાં જ મૂલ્યો માટે,

$$|\Psi(x)| \leq M$$

જ્યાં M કોઈ પરિમિત અચળ હોય તો x ના સમગ્ર વિસ્તારમાં $\Psi(x)$ પરિમિત ગણાય.

પ્રશ્ન :- ફુરિયર શ્રેણી લખો અને સમજાવો. લંબ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી તેમાં આવતા અચળાંકો a_n અને b_n ના મૂલ્યો શોધો. (N-13 (7))

આપણા કિસ્સામાં $\Psi(x)$ આવર્ત વિધેય હોવાથી $x = -L/2$ થી $x = +L/2$ વિસ્તારમાં જેવી સ્થિતિ હશે તેવી સ્થિતિ બીજા આવર્તોમાં પણ હશે. આથી આપણે x ના $-L/2$ થી $+L/2$ વિસ્તારમાં જ $\phi(x)$ પરની ડિરીક્લેટ શરતોનો વિચાર કરવાનો છે. આપણા કિસ્સામાં $\phi(x)$ માટે આ શરતો સંતોષાય છે.



આકૃતિ : 12

મહત્તમો, ન્યૂનતમો, અસાતત્યો અને પરિમિતતા ધરાવતું એક વિધેય આકૃતિ (12) માં દર્શાવ્યું છે.

ફુરિયરના કથન અનુસાર $\phi(x)$ હવે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાશે.

ફુરિયર શ્રેણી :
$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right] \quad ....(5)$$

સમજૂતી: **સ.ક. (5) માં ત્રણ મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં લો.**

(1) સરવાળો $n = 1$ થી $n = \infty$ સુધી જાય છે. ડિરીક્લેટે પોતાના મૌલિક સંશોધનમાં આવર્ત વિધેયને $n = 1$ થી $n = n$ સુધીનાં પદોમાં દર્શાવી, $n \to \infty$ લઈ સાબિત કર્યું હતું કે $n \to \infty$ માટે જમણી બાજુની શ્રેણી વડે $\phi(x)$ ને સચોટતાપૂર્વક રજૂ કરી શકાય છે.

(2) $\phi(x)$ નો જેટલો આવર્ત છે, તેટલા જ આવર્તવાળા સાઈન અને કોસાઈન વિધેયો છે. આ હકીકત વ્યાવહારિક દૃષ્ટિએ ખૂબ જ અગત્યની છે. કોઈ એક આવર્તવાળા $\phi(x)$ માટે ગમે તે આવર્તવાળા સાઈન કે કોસાઈન વિધેયો ન ચાલે.

(3) શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a_0/2$ લખેલું છે. અત્રે છેદમાં 2 લખવાનું ફરજિયાત નથી, પરંતુ આગળ ઉપરના અમુક પરિણામોમાં સંમિતિ દેખાય તે માટે તેમ લખેલું છે.

સ.ક. (5) માં જમણી બાજુની શ્રેણી ગણી શકીએ તે માટે અચળાંકો a_n અને b_n જાણવાં જરૂરી છે. આપણે સાઈન અને કોસાઈન વિધેયોના લંબગુણધર્મ (orthogonal property) નો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

અચળાંકોની ગણતરી :

અચળાંકો ગણવા માટે નીચેનાં સંકલનો વાપરીએ છીએ :

$$(i) \quad \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \cos\frac{2m\pi x}{L}\,\sin\frac{2n\pi x}{L}\,dx = 0 \quad ....(6)$$

$$(ii) \quad \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \cos\frac{2m\pi x}{L}\,\cos\frac{2n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \sin\frac{2m\pi x}{L}\,\sin\frac{2n\pi x}{L}\,dx = \delta_{mn} \quad ....(7)$$

જ્યાં, δ_{mn} ને ક્રોનેકર δ કહેવામાં આવે છે.

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_{mn} = 1 & \text{જો } m = n \\ \quad\;\; = 0 & \text{જો } m \neq n \end{array}\right\}$$

હવે, સ.ક. (5) ની બંને બાજુને $\frac{2}{L}\cos\frac{2\pi mx}{L}$ વડે ગુણી, $x = -L/2$ થી $+L/2$ સુધીના વિસ્તારમાં સંકલન કરતાં,

$$\therefore \quad \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \phi(x)\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)\left(\frac{2}{L}\right)\int_{-L/2}^{+L/2}\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx$$

$$+\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2\pi nx}{L}\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx$$

$$+\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{2n\pi x}{L}\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx \quad ....(9)$$

જો સ.ક. (9) માં $m \neq 0$, અને $m \neq n$ હોય તો જમણી બાજુના ત્રણેય પદો શૂન્ય થશે. પણ જો $m = 0$ હોય તો જ્યારે $n \neq m$ થશે ત્યારે જ જમણી બાજુનાં છેલ્લાં બે પદો શૂન્ય થશે. આથી સ.ક. (9) માં $m = 0$ મૂકતાં,

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx = \frac{a_0}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}dx$$

$$\therefore \quad \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx = \frac{a_0}{L}\cdot L$$

$$\therefore \quad \boxed{a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\,dx} \quad ....(10)$$

સ.ક. (9) પર પાછા આવો. જમણી બાજુ n પરના સરવાળાનાં જુદા જુદા પદોનો વિચાર કરતાં જણાશે કે,

(*i*) જ્યારે $n = m$ વાળું પદ આવશે ત્યારે બીજા પદમાંનાં સંકલનનું મૂલ્ય $\delta_{mn} = 1$ થશે.

(*ii*) $m \neq 0$ માટેની કોઈ પણ કિંમત માટે પહેલાં પદમાં સંકલનનું મૂલ્ય શૂન્ય જ રહેશે.

(*iii*) $m = n$ માટે ત્રીજા પદમાંનાં સંકલનનું મૂલ્ય પણ શૂન્ય જ થશે.

આથી, $m \neq 0$ હોય તેવી સ્થિતિમાં જમણી બાજુના બીજા પદમાં ફક્ત $n = m$ વાળા પદનું સંકલન જ બચી જશે.

$$\therefore \frac{2}{L}\int \phi(x)\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} a_m \cos\frac{2m\pi x}{L}\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx$$

$$= a_m\,\delta_{mm}$$

$$= a_m$$

$$\therefore \boxed{a_m = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx} \qquad ....(11)$$

હવે, આ જ પ્રમાણે જો સ.ક. (2) ની બંને બાજુને $\frac{2}{L}\sin\frac{2m\pi x}{L}$ વડે ગુણી બંને બાજુ $-L/2$ થી $+L/2$ વચ્ચે સંકલન કરતાં, સાબિત કરી શકાય કે,

$$\boxed{b_m = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\sin\frac{2m\pi x}{L}\,dx} \qquad ....(12)$$

સ.ક. (11) અને સ.ક. (12) માં m નાં જુદા જુદા મૂલ્યો અવેજ કરીને $a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, b_3, ...$ વગેરે મૂલ્યો મેળવી શકાય. ભૌતિક દૃષ્ટિએ તો, $\phi(x)$ વિધેયને ફુરિયર શ્રેણીમાં રજૂ કરવા માટે કેટલા કેટલા કંપવિસ્તાર (a_n અને b_n) વાળાં *sine* અને *cosine* વિધેયો વાપરવાં જોઈએ તેની માહિતી સ.ક. (11) અને સ.ક. (12) માંથી મળે છે. આવા કંપવિસ્તારો નક્કી કરવામાં $\phi(x)$ પોતે જ ભાગ ભજવે છે તે તો તમે સ.ક. (11) અને સ.ક. (12) ની જમણી બાજુના સંકલનમાં $\phi(x)$ ની હાજરી નોંધીને સમજી શકશો.

પ્રશ્ન:- ફુરિયર શ્રેણી નું સંકર સ્વરૂપ તારવો. તેમાં આવતા અચળાંકો માટેના સૂત્રો મેળવો. (N - 13G)

4. ફુરિયર શ્રેણીની સંકર રજૂઆત (Complex Representation of Fourier Series) :

સ.ક. (5) માં શ્રેણીને *sine* અને *cosine* નાં પદોમાં દર્શાવવાને બદલે સંકર સ્વરૂપમાં પણ લખી શકાય. શ્રેણીની સંકર રજૂઆત ટૂંકી છે અને ગણતરીઓ વધારે સગવડભરી છે. આ રજૂઆત કરવા આપણે નીચેનાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

$$\cos\frac{2\pi nx}{L} = \frac{e^{2\pi nxi/L} + e^{-2\pi nxi/L}}{2} \qquad ....(13)$$

$$\sin\frac{2\pi nx}{L} = \frac{e^{2\pi nxi/L} - e^{-2\pi nxi/L}}{2i} \qquad ....(14)$$

★ સ.ક. (9) માં આપણે n પરના સરવાળાના એક એક પદ વાર સંકલન કર્યું છે. જો $\sum_n$ શ્રેણી નિયમિત રીતે અભિસારી (uniformly convergent) હોય તો આમ થઈ શકે. જે વિસ્તારમાં વિધેય વ્યાખ્યાયિત કર્યું હોય તે વિસ્તારના દરેક બિંદુ પાસે વિધેયને રજૂ કરતી શ્રેણી એકસરખી ઝડપથી અભિસારી બને તો વિધેયને રજૂ કરતી શ્રેણી નિયમિત રીતે અભિસારી કહેવાય.

સ.ક. (5) માં *sine* અને *cosine* નાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$$\therefore \quad \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left\{\frac{e^{2\pi nxi/L} + e^{-2\pi nxi/L}}{2}\right\} + b_n\left\{\frac{e^{2\pi nxi/L} - e^{-2\pi nxi/L}}{2i}\right\}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{2\pi nxi/L}\left\{\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right\} + e^{-2\pi nxi/L}\left\{\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right\}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{2\pi nxi/L}\left\{\frac{1}{2}(a_n - i\,b_n)\right\} + e^{-2\pi nxi/L}\left\{\frac{1}{2}(a_n + i\,b_n)\right\}\right] \quad ....(15)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\, e^{2\pi nxi/L} + C_n\, e^{-2\pi nxi/L}\right]$$

જ્યાં, $C_n = \frac{1}{2}(an - ibn)$, જો $n > 0$ ....(16)

$= \frac{1}{2}(an + ibn)$, જો $n < 0$ ....(17)

વળી, $C_n = \frac{a_0}{2}$ જો $n = 0$ લઈએ તો, ...(18)

$$\therefore \quad \boxed{\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n\, e^{i(2\pi nx)/L}} \quad ....(19)$$

હવે, a_n અને b_n ના સ.ક. (11) અને (12) માં આપેલાં મૂલ્યો અને સ.ક. (16) કે (17) પરથી C_n મેળવી સ.ક. (16) માં a_n અને b_n ના સ.ક. (11) અને (12) માંથી મૂલ્યો મૂકતાં,

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}\,dx - i\cdot\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\left[\cos\frac{2\pi nx}{L} - i\sin\frac{2\pi nx}{L}\right]dx$$

$$\therefore \quad \boxed{C_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}\phi(x)\, e^{-2\pi nxi/L}\,dx} \quad ....(20)$$

સ.ક. (17) માં પણ a_n તથા b_n નાં મૂલ્યો મૂકતાં અને n ને ઋણ લેતાં આ જ પરિણામ મેળવી શકાય છે.

દાખલાઓ

દા. 1. નીચેના વિધેય માટે ફુરિયર શ્રેણી મેળવો.

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < \pi$$

$$f(x) = -1 \qquad \pi < x < 2\pi$$

(April 1998)

દા. 1 માંથી સમી. (7) અને (8) નો ઉપયોગ કરીને

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos nx\,dx \qquad \left| \begin{array}{ll} f(x) = 1 & 0 < x < \pi \\ f(x) = -1 & \pi < x < 2\pi \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-dx)$$

$$= \frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}[x]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\pi - 0] - \frac{1}{\pi}[2\pi - \pi]$$

$$= \frac{1}{\pi}\times\pi - \frac{1}{\pi}\times\pi = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{a_0 = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\ \sin nx\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\ \sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin nx\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n\cdot 0}{n}\right] + \left[\frac{\cos n\,2\pi}{n} - \frac{\cos n\pi}{n}\right]\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\ [-\cos n\pi + \cos 0] + \frac{1}{n\pi}\ [\cos 2\pi n - \cos n\pi]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\ \{(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\ \{2 - 2\ (-1)^n\} = \frac{2}{n\pi}\ \{1 - (-1)^n\}$$

હવે જો n = બેકી સંખ્યા હોય તો,

$b_n = 0$ થશે

પરંતુ n = એકી સંખ્યા હોય તો,

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \times 2 = \frac{4}{n\pi}$$

અને તેથી $a_0 = 0 = a_n$ અને $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$ (એકી સંખ્યા માટે) મૂકતાં,

$$\phi\ (x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\phi\ (x) = b_n \sin nx = \frac{4}{n\pi} \sin nx$$

$$\phi\ (x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$\phi\ (x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\ldots\right)$$

દા. 2. નીચેના વિધેય માટે ફુરિયર શ્રેણી મેળવો : (D-12(7))

$f(x) = 0 \quad -2 < x < 0$ $\quad -\pi < x < 0$

$f(x) = 1 \quad 0 < x < 2$ $\quad 0 < x < \pi$ **(*April* 1997)**

દા. 1 માં $-L/2 < x < L/2$ માટે આપેલી ફુરિયર

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)$$

આપણને આ દાખલામાં $-2 < x < 0$ અને $0 < x < 2$ આપેલ છે એટલે કે $L = 4$ મૂકતાં,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{4}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{4}\right)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)}$$

આથી, $$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx \quad \text{અને} \quad b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \int_{0}^{2} 1\cdot dx\right] = \frac{1}{2}[x]_0^2 = \frac{1}{2}[2]$$

$$\therefore \quad \boxed{a_0 = 1}$$

હવે $$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \int_{0}^{2} 1\cdot\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx\right]$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi\cdot 2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\,[\sin n\pi]$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 = \frac{-1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{2\pi n}{2} - \cos 0\right)\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\,[1 - \cos \pi n] = \frac{1}{n\pi}\,[1 - (-1)^n]$$

n = બેકી સંખ્યા માટે, $b_n = 0$

પરંતુ, n = એકી સંખ્યા માટે, $b_n = \frac{1}{n\pi}\,[1 - (-1)^n]$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n = \text{એકી સંખ્યા}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \ldots\right.$$

દા. 3. નીચે દર્શાવેલ આવર્ત વિધેયને તેની આપેલ મર્યાદામાં ફુરિયર શ્રેણી મેળવો.

$$\theta(x) = \sin x \qquad 0 \le x \le \pi$$
$$= -\sin x \qquad -\pi \le x \le 0$$

અચળાંકો a_0, a_n, b_n શોધવા માટે તેના સૂત્રો વાપરતાં,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \theta(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} \theta(x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\pi} \sin x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi}$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{2}{\pi}[-\cos \pi + \cos 0]$$

$$= \frac{2}{\pi}[1 + 1] \qquad (\because \cos \pi = -1)$$

$$\therefore \quad \boxed{a_0 = \frac{4}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x \cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} \sin nx \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} -\sin x \cos nx\, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_n = \frac{-4}{\pi}\left(\frac{1}{n^2 - 1}\right) \qquad (n = \text{બેકી})$$

$$= 0 \qquad (n = \text{એકી})$$

હવે, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\boxed{b_n = 0}$$

આથી ફુરિયર શ્રેણીમાં આ સહગુણકોની કિંમત મૂકતાં,

$$\theta(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n(x) + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$$

n ના એક મૂલ્ય માટે a_n શૂન્ય હોવાથી,

$$\theta(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[(-1) + \frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \ldots\ldots\right]$$

$$\theta(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cos 2x - \frac{4}{15\pi}\cos 4x + \ldots\ldots$$

સ્વાધ્યાય

1. (અ) ફુરિયર શ્રેણી એટલે શું ? ડીરિક્લેટની શરતો (Dirichlet conditions) લખો. **(*May* 2001)**

   (બ) ફુરિયર શ્રેણી લખીને લંબ ગુણધર્મ (Orthogonal property) નો ઉપયોગ કરી તેમાં આવતા અચળાંકનું મૂલ્ય શોધો. **(*April* '97, 2000)**

2. ફુરિયર શ્રેણીનું સંકર સ્વરૂપ (Complex form) તારવો. તેમાં આવતા અચળાંકો માટેનાં સૂત્રો તારવો. **(*April* '98, *May* 2001)**

3. બેસેલની અસમાનતા પ્રાપ્ત કરો. પર્સેવાલ (Parseval's) નું સૂત્ર આપો અને સૂત્રની સમજૂતી આપો.

4. પર્સેવાલનું સૂત્ર લખો. તેનું ભૌમિતિક અર્થઘટન આપો. **(*April* '98, '99, 2000)**

5. યોગ્ય ઉદાહરણ લઈ ફુરિયર ટ્રાન્સફોર્મનું અર્થઘટન કરી તે અનિશ્ચિતતાના સિદ્ધાંત તરફ દોરી જાય છે તેમ દર્શાવો. **(*April* '99)**

6. તરંગ પેકેટ (Wave packet) એટલે શું ? આઈનસ્ટાઈન અને ડી બ્રોગ્લીના સંબંધો મેળવવામાં તેના ઉપયોગ વર્ણવો. તરંગ પેકેટ માટે સમૂહ વેગ (Group velocity) નું સૂત્ર મેળવો. દર્શાવો કે, કણોનો વેગ તેને અનુરૂપ તરંગ પેકેટના ગ્રુપ વેગ સાથે સંકલિત હોય છે.

❖ ❖ ❖

ધારો કે એક કણ x, y સમતલમાં નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરી રહ્યો છે. આ ગતિનાં સમીકરણો જો (x, y) એમ દ્વિપારિમાણિક યામ પદ્ધતિમાં લખીએ તો,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad ....(1)$$

અને
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \qquad ....(2)$$

પણ આ જ કોયડા માટે આપણે (r, θ) યામ પદ્ધતિ (પ્લેન પોલર યામ પદ્ધતિ) વાપરીએ તો,

$$m\frac{d^2r}{dt^2}, \frac{dr}{dt^2}, \frac{d\theta}{dt^2}, m\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

વગેરે પદો સમાવતાં સમીકરણો મળે. (જુઓ પ્રકરણને અંતે ઉદાહરણ).

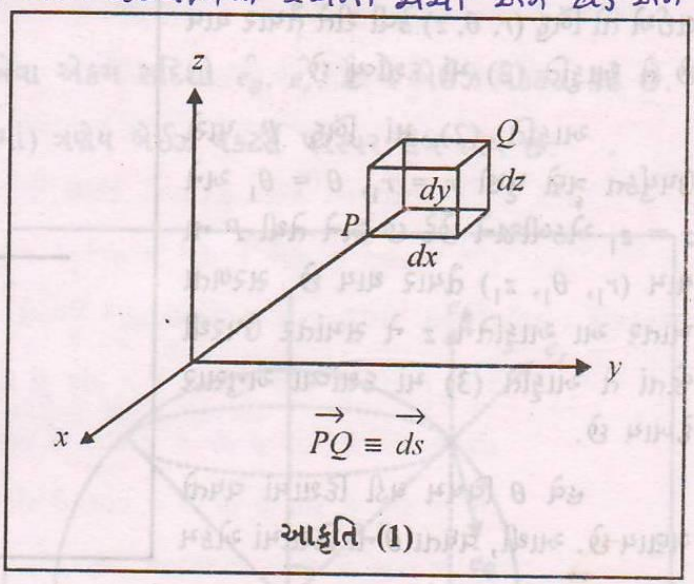
તમને એમ થતું હશે કે જુદા જુદા પ્રકારની યામ પદ્ધતિઓ કેવી રીતે તૈયાર કરાતી હશે ?

1. કાર્તેઝીય યામ પદ્ધતિ :

પ્રશ્ન: લંબ યામ પદ્ધતિ કેવી રીતે તૈયાર કરાય, તે જણાવી નળાકારીય યામ પદ્ધતિની રચના સમજાવો અને લંબ અને વક્રના સૂત્રો મેળવો. (N-13 (૭))

આ યામ પદ્ધતિ તૈયાર કરવા માટે x = અચળ, y = અચળ અને z = અચળ એમ ત્રણ એકબીજાને લંબરૂપે છેદતાં સમતલો લેવામાં આવે છે. જુઓ આકૃતિ (1).

આ યામ પદ્ધતિનું ઉગમબિંદુ $x = 0$, $y = 0$ અને $z = 0$ સમતલોના છેદનબિંદુ પર છે. હવે આ યામ પદ્ધતિમાં કોઈ પણ બિંદુનો યામ (x_1, y_1, z_1) છે તેનો અર્થ એવો થયો કે ત્રણ સમતલો $x = x_1$, $y = y_1$ અને $z = z_1$ જ્યાં એકબીજાને લંબરૂપે છેદે છે તે બિંદુ (x_1, y_1, z_1) છે.



આકૃતિ (1)

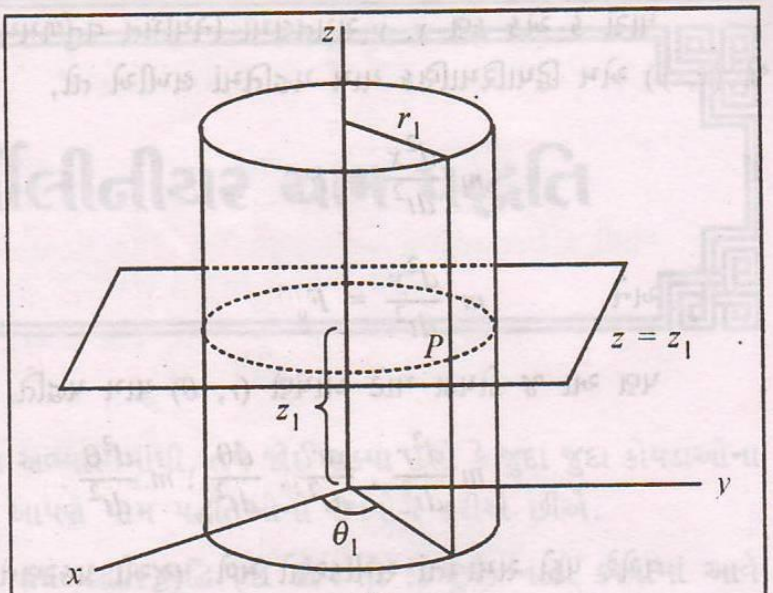
આ યામ પદ્ધતિમાં વધતા x ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{i}$, વધતા y ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{j}$ અને વધતા z ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{k}$ લેવામાં આવે છે. જો આપેલા બિંદુ પાસેથી વધતા x ની દિશામાં dx અંતર ખસીએ, વધતા y ની દિશામાં dy અંતર ખસીએ અને વધતા z ની દિશામાં dz અંતર ખસીએ તો રેખાખંડ (અથવા અહીં સ્થાનાંતર સદિશ)

$$\vec{ds} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$ નક્કી કરી શકીએ. ....(3)

$$\therefore \quad ds^2 = \vec{ds}\cdot\vec{ds} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad ....(4)$$

2. નળાકારીય યામ પદ્ધતિ :

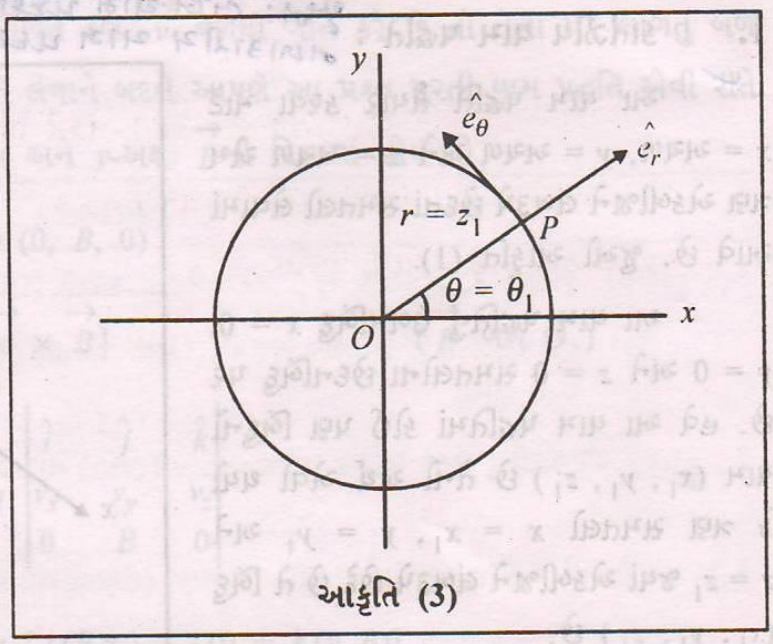
આ યામ પદ્ધતિ તૈયાર કરવા માટે નીચે જણાવેલ ત્રણ પૃષ્ઠો લઈ, તેઓ એક બિંદુ પાસે એકબીજાને લંબરૂપે છેદે છે તેમ વિચારવામાં આવે છે. (1) નળાકાર પૃષ્ઠ, r (નળાકારની ત્રિજ્યા) = અચળ (2) અર્ધ સમતલ (આ સમતલમાં z અક્ષ આવેલી છે અને આ સમતલ નળાકાર પૃષ્ઠને ઊભી રેખામાં છેદે છે.) θ = અચળ (3) z = અચળ સમતલ. આ સમતલ (x, y) સમતલને સમાંતર છે અને નળાકાર પૃષ્ઠ તથા ઉપર્યુક્ત છેદન રેખાને z = અચળ પાસે છેદે છે.



આકૃતિ (2)

જો $r = r_1$, $\theta = \theta_1$ અને $z = z_1$ લઈએ તો બિંદુ (r, θ, z) કેવી રીતે તૈયાર થાય છે તે આકૃતિ (2) માં દર્શાવ્યું છે.

આકૃતિ (2) માં બિંદુ P પાસે ઉપર્યુક્ત ત્રણે પૃષ્ઠો $r = r_1$, $\theta = \theta_1$ અને $z = z_1$ એકબીજાને છેદે છે અને તેથી P ના યામ (r_1, θ_1, z_1) તૈયાર થાય છે. સરળતા ખાતર આ આકૃતિને z ને સમાંતર ઉપરથી જોતાં તે આકૃતિ (3) માં દર્શાવ્યા અનુસાર દેખાય છે.



આકૃતિ (3)

હવે θ વિષમ ઘડી દિશામાં વધતો ગણાય છે. આથી, વધતા θ ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{e}_\theta$ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લેવામાં આવે છે. વળી, વધતા r ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{e}_r$ છે.

પુસ્તકના પાનને લંબ વધતા z ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{e}_z \equiv \hat{k}$ લેવામાં આવે છે. જો P કોઈ બિંદુ (r, θ, z) હોય તો P થી વધતા θ ની દિશામાં સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર = $r\,d\theta$.

સદિશ સ્વરૂપમાં આ સ્થાનાંતર = $r\,d\theta\ \hat{e}_\theta$.

તે જ પ્રમાણે P થી વધતા r ની દિશામાં સૂક્ષ્મ સદિશ સ્થાનાંતર = $dr\ \hat{e}_r$ અને વધતા z ની દિશામાં સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર = $dz\ \hat{k}$.

$\therefore$ P પાસે સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર સદિશ

$$\boxed{\vec{ds} = r\,d\theta\ \hat{e}_\theta + dr\ \hat{e}_r + dz\ \hat{k}} \qquad ....(5(a))$$

$$\therefore \quad ds^2 = \vec{ds}\cdot\vec{ds} = (r\,d\theta)^2 + (dr)^2 + (dz)^2$$

$$\therefore \boxed{ds^2 = r^2\ (d\theta)^2 + (dr)^2 + (dz)^2} \qquad ....(5)$$

જુઓ કે ds^2 નું મૂલ્ય માત્ર $(d\theta)^2 + (dr)^2 + (dz)^2$ જેટલું નથી પણ $d\theta$ સાથે r અવયવ પણ આવે છે.

આમ, રેખાખંડના સદિશમાં યામના સૂક્ષ્મ વધારા સાથે ગુણાકારમાં જે અવયવ કે અવયવો આવે છે તેમને સ્કેલ ફેકટર્સ કહે છે. આપણા કિસ્સામાં માત્ર એક જ સ્કેલ ફેકટર r આવે છે.

વળી, ds^2 ના સૂત્રમાં $(d\theta)\ (dr)$ કે $(dr)\ (dz)$ કે $(d\theta)\ (dz)$ જેવા ગુણાકારો પણ આવતા નથી તે નોંધો. જે યામ પદ્ધતિમાં ds^2 ના સૂત્રમાં યામોના ગુણાકારો ન આવતા હોય તેવી યામ પદ્ધતિને ઓર્થોગોનલ (લંબ) યામ પદ્ધતિ કહે છે.

ઉપર વાપર્યા છે તેવા **એકબીજાને લંબ એવા એકમ સદિશો $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_r$, $\hat{k}$ ને બેઈઝ વેકટર્સ કહે છે.**

ઓર્થોગોનલ યામ પદ્ધતિમાં (ત્રિપરિમાણમાં) ત્રણેય બેઈઝ વેકટર્સ પરસ્પર લંબ હોય છે.

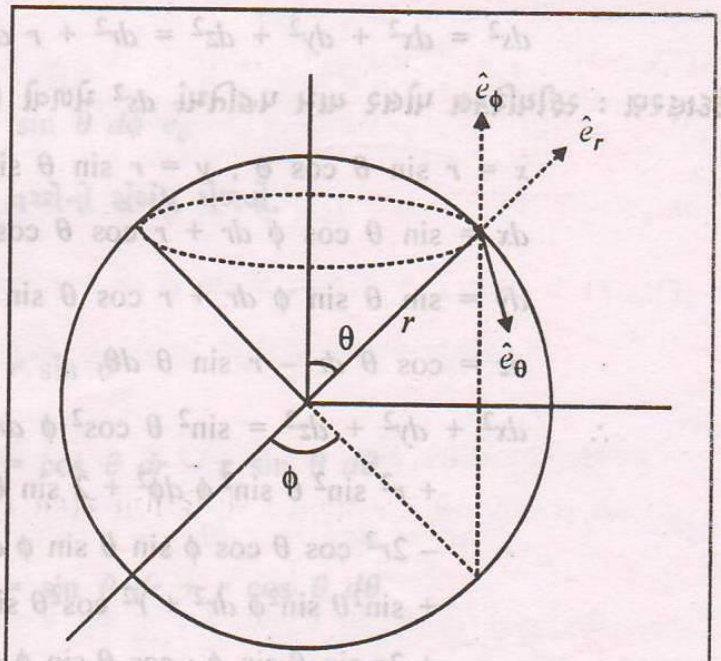
3. સ્ફીયરિકલ પોલર યામ પદ્ધતિ :

આ પદ્ધતિમાં ત્રણ પરસ્પર લંબ પૃષ્ઠોમાંનું એક પૃષ્ઠ r ત્રિજ્યાના ગોળાનું પૃષ્ઠ છે, જેને કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{અચળ}$$

દ્વારા રજૂ કરાય છે. બીજું પૃષ્ઠ, જેની ટોચ મૂળબિંદુ પર છે તેવા શંકુનું પૃષ્ઠ છે. આ શંકુની અક્ષ z-અક્ષ સાથે સંપાત થાય છે અને શંકુનો કોણ θ છે. θ = અચળ. ત્રીજું પૃષ્ઠ એ z માંથી પસાર થતું અને x સાથે ϕ કોણ બનાવતું અર્ધ સમતલ છે. ϕ = અચળ.

આ ત્રણેય પૃષ્ઠો કોઈ બિંદુ P પાસે એકબીજાને લંબરૂપે છેદી તે બિંદુના યામ (r, θ, ϕ) કેવી રીતે બનાવે છે તે આકૃતિ (4) માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ (4)

$$\therefore \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta \frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$= -\hat{e}_r\,\omega \qquad \text{(સ.ક. (1) પરથી)}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = -r\omega^2\,\hat{e}_r + r\,\alpha\,\hat{e}_\theta \left(= \frac{v^2}{r}\right)$$

અહીં રેખીય પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક $r\omega^2$ એ $\hat{e}_r$ ની વિરુદ્ધ દિશામાં છે એટલે તેની સાથે ઋણ ચિહ્ન આવે છે. રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક $r\alpha$ છે.

4. કર્વીલીનીયર યામો :

પ્રશ્ન: કર્વીલીનીયર યામ પદ્ધતિમાં $\vec{ds}$ અને ds^2 મેળવો. (N-13(7))

અત્યાર સુધીની ચર્ચાનો નિચોડ નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

(1) ત્રિપરિમાણિક અવકાશમાં લંબ યામ પદ્ધતિ નક્કી કરવા માટે પરસ્પર લંબ એવી ત્રણ (એકબીજાને છેદતાં) પૃષ્ઠો લેવા જોઈએ.

(2) આ ત્રણ પૃષ્ઠોનું છેદન બિંદુના યામ તે યામ પદ્ધતિ અનુસાર નક્કી થાય છે.

(3) છેદન બિંદુ પાસે એકમ સદિશો છેદન રેખાઓ પર વધતા યામની દિશામાં સ્પર્શક રૂપે લઈ શકાય.

હવે, પ્રશ્ન આ છે :

આપણે કેટલી રીતે કેવા પ્રકારની પરસ્પર લંબ અને એકબીજીને લંબરૂપે છેદતી સપાટીઓ (પૃષ્ઠો) લઈ શકીએ ?

અત્યાર સુધી આપણે ત્રણ રીતે ત્રણ પ્રકારનાં પૃષ્ઠો લીધાં છે.

(1) x = અચળ, y = અચળ, z = અચળ સમતલો.

(2) r = અચળ (નળાકાર), θ = અચળ અને z = અચળ સમતલો

(3) r = અચળ (ગોળો), θ = અચળ (શંકુ), ϕ = અચળ સમતલ

પણ માત્ર, આટલી જ શક્યતાઓ નથી. એવું જાણી શકાય છે કે 11 રીતે લંબપૃષ્ઠો લઈ શકાય છે અને તેથી 11 પ્રકારની લંબ યામ પદ્ધતિઓ મેળવી શકાય છે. આ બધી યામ પદ્ધતિઓ માટે દેખીતી રીતે જ બેઝ સદિશો, સ્કેલ ફેકટર્સ જુદા જુદા હશે અને યામો તો જુદા જુદા ખરા જ. આ સંજોગોમાં આ યામ પદ્ધતિઓમાં, વ્યાપક પ્રકારની સદિશ ગણતરીઓ કરવાનું કામ મુશ્કેલ બની જાય.

એટલે આપણે હવે એવું કરીએ છીએ કે પૃષ્ઠ કેવા પ્રકારના છે તેની ચિંતા કર્યા વગર ત્રણ પરસ્પર એકબીજાને છેદે તેવા પૃષ્ઠોને ધ્યાનમાં લઈએ છીએ. આવા પૃષ્ઠો એ વ્યાપક પણે ઉપયોગમાં લઈ શકાય (તેમના ખાસ કિસ્સાઓ લઈને) તેવી યામ પદ્ધતિ આપશે.

આવી સામાન્ય યામ પદ્ધતિને curvilinear co-ordinate system કહે છે.

અહીં કોઈ પણ બે પૃષ્ઠો વચ્ચેની છેદન રેખા સુરેખા હોવી જરૂરી નથી.

ધારો કે કર્વીલીનીયર યામો x_1, x_2, x_3 છે અને તેઓ x_1 = અચળ, x_2 = અચળ અને x_3 = અચળ પૃષ્ઠોના છેદન વડે મળે છે. અહીં x_1, x_2, x_3 ને કાર્તેઝીય યામો સમજી બેસશો નહિ.

$x_1 = x$, $x_2 = y$ અને $x_3 = z$ કાર્તેઝીય યામો

$x_1 = r$, $x_2 = \theta$ અને $x_3 = z$ નળાકારીય યામો

$x_1 = r$, $x_2 = \theta$ અને $x_3 = \phi$ ગોળીય યામો એમ સમજવું.

ધારો કે x_1, x_2 અને x_3 ને અનુલક્ષીને એકમ સદિશો (બેઝ સદિશો) અનુક્રમે $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ અને $\hat{e}_3$ છે.

આ પદ્ધતિમાં $\vec{ds}$ મેળવવા માટે આપણે અગાઉ ભણી ગયા તે યામ પદ્ધતિના પરિણામોની મદદ લઈ શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે ગોળીય (ધ્રુવીય) યામ પદ્ધતિમાં,

$$\vec{ds} = dr\ \hat{e}_r + r\ d\theta\ \hat{e}_\theta + r \sin\theta\ d\phi\ \hat{e}_\phi \text{ છે.}$$

અહીં $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ અને $\hat{e}_\phi$ સાથે 1, r અને $r \sin\theta$ એમ સ્કેલ ફેકટર્સ (અનુક્રમે) આવે છે. આપણે કર્વીલીનીયર યામ પદ્ધતિના સ્કેલ ફેકટર્સને h_1 ($\hat{e}_1$ ને અનુલક્ષીને), h_2 ($\hat{e}_2$ ને અનુલક્ષીને) અને h_3 ($\hat{e}_3$ ને અનુલક્ષીને) દર્શાવીશું. યામોના વધારાઓને dx_1, dx_2, dx_3 વડે દર્શાવીશું.

$$\therefore \quad \vec{ds} = h_1\ dx_1\ \hat{e}_1 + h_2\ dx_2\ \hat{e}_2 + h_3\ dx_3\ \hat{e}_3 \qquad ....(1)$$

$$\therefore \quad \vec{ds} = \sum_{i=1}^{3} h_i\ dx_i\ \hat{e}_i \qquad ....(2)$$

$\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ અને $\hat{e}_3$ પરસ્પર લંબ હોવાથી (જમણા હાથની યામ પદ્ધતિ અનુસાર)

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \text{ જો } i \neq j$$

અને $$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 1 \text{ જો } i = j$$

વળી, $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$, $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$ અને $\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$

$$\therefore \quad ds^2 = h_1^2\ dx_1^2 + h_2^2\ dx_2^2 + h_3^2\ dx_3^2 \qquad ....(3)$$

અથવા $$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2\ dx_i^2 \qquad ....(4)$$