B.Sc. (Physics), Paper-3, Unit-2

Chap. : 2 ઘન પદાર્થોના ઉષ્મીય ગુણધર્મો.

Q:1 ઘન પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્મા માટે આઇન્સ્ટાઇનના વાદની ચર્ચા કરો અને જરૂરી સૂત્ર તારવો. [01, 03, 02,

ધારો કે આપેલ (N પરમાણુ ધરાવતા) ઘન પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્મા શોધવા માટે આપણે દોલકોની કુલ ઉર્જા શોધવી જોઈએ. આ માટે આપણે પ્લાન્કની પરિકલ્પના અને પ્રચલિત સંખ્યાત્મક યંત્રશાસ્ત્ર (Classical statistical mechanics)ના એક પરિણામનો ઉપયોગ કરીશું.

⇒ પ્લાન્કની પરિકલ્પના અનુસાર સૂક્ષ્મ દોલકો ઉર્જાનાં 'સતત' જથ્થા ધારણ કરી શકે નહિ. જો કોઈ દોલકની કોણીય આવૃત્તિ ω હોય તો આવા દોલકની શક્ય ઉર્જાઓ

$$E_n = n\hbar\omega \quad \text{હોય છે.} \longrightarrow (1)$$

જ્યાં $n = 0, 1, 2, \ldots$ વગેરે (ક્વૉન્ટમ નંબર)

$\hbar = h/2\pi$, $h = 6.62 \times 10^{-34}$ જુલ/સે. પ્લાન્કનો અચળાંક

⇒ હવે પ્રચલિત સંખ્યાત્મક યંત્રશાસ્ત્ર અનુસાર T° કેલ્વીન તાપમાને જેઓ n મી ક્વૉન્ટમ સ્થિતિમાં હોય તેવા દોલકોની સંખ્યા

$$N_n \propto e^{-\hbar\omega/KT} \longrightarrow (2)$$

જ્યાં K = બોલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક $= 1.38 \times 10^{-23}$ જુલ/અણુ $^\circ K$

∴ દોલકોની કુલ સંખ્યા $= \sum_n e^{-n\hbar\omega/KT} \longrightarrow (3)$

સમી. (2) પરથી n મી ક્વૉન્ટમ સ્થિતિમાં રહેલા દોલકોની ઉર્જા

$$E_n \propto n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/KT} \longrightarrow (4)$$

સમી. (3) અને (4) પરથી દોલકની સરેરાશ ઉર્જા,

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/KT}}{\sum_n e^{-n\hbar\omega/KT}} \longrightarrow (5)$$

① શૂન્યબિંદુ ઊર્જા (Zero Point energy):-

હકીકતમાં, ક્વોન્ટમ યંત્રશાસ્ત્ર અનુસાર દોલકની ઊર્જા $n\hbar\omega$ નહિ પરંતુ $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ હોય છે આથી $\langle E\rangle$ નું સૂત્ર ⑧ નીચે મુજબ લખવું જોઈએ.

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/KT}-1} \longrightarrow (12)$$

આમ કરતાં વિશિષ્ટ ઉષ્માનો T સાથેનો સંબંધ બદલાતો નથી કારણ કે સમી. (12) માં રહેલ પદ $\hbar\omega/2$ વિશિષ્ટ ઉષ્મામાં કોઈ ફાળો આપતું નથી તેથી $\hbar\omega/2$ ને શૂન્ય બિંદુ ઊર્જા (Zero Point energy) કહે છે. કેલ્વિન શૂન્ય તાપમાને પણ પદાર્થ $\hbar\omega/2$ જેટલી દોલન ઊર્જા ધરાવે છે.

② આઈન્સ્ટાઈન તાપમાન (θ_E) અને આઈન્સ્ટાઈન વિધેય (F_E):-

સમી. (11) ના સરળ અભ્યાસ ઉપયોગમાટે આઈન્સ્ટાઈન તાપમાન θ_E નીચે મુજબનો વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\frac{\hbar\omega}{K} = \theta_E \longrightarrow (13)$$

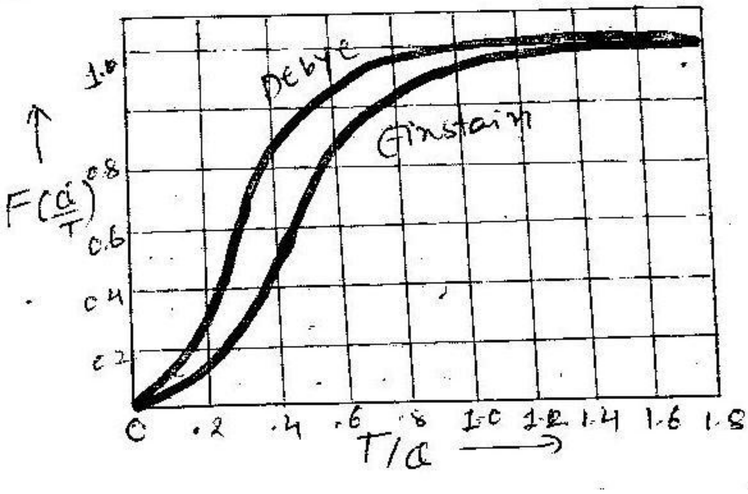
હવે સમી. (11) નીચે મુજબ લખી શકાય,

$$\frac{C_v}{3R} = \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{\left(e^{\theta_E/T}-1\right)^2} \longrightarrow (14)$$

$$\therefore \boxed{\frac{C_v}{3R} = F_E\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2}$$

જેમાં $F_E = \frac{e^{\theta_E/T}}{\left(e^{\theta_E/T}-1\right)^2}$ ને આઈન્સ્ટાઈન વિધેય કહે છે.

નીચેની આકૃતિમાં $C_v/3R$ તાપમાન સાથે સમી. (14) અનુસાર કેવી રીતે બદલાય છે તે દર્શાવ્યું છે.



ઉંચા અને નિમ્ન તાપમાનના કિસ્સા :-

(i) ઉંચા તાપમાને $\frac{C_v}{3R}$:-

સમી. (11) માં $KT >>> \hbar\omega$ હોય ત્યારે
$T >>> \hbar\omega/K$ અથવા
$T >>> \theta_E$ હોય ત્યારે

સમી. (14) માં અંશ $e^{\theta_E/T} \rightarrow e^0 \rightarrow 1$

છેદ $e^{\theta_E/T} - 1 = 1 + \theta_E/T + \cdots - 1 = \frac{\theta_E}{T}$

આ કિંમતો સાથે સમી. (14) નીચેનું સ્વરૂપ ધારણ કરશે

$$\frac{C_v}{3R} = \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{1}{(\theta_E/T)^2}$$

$$\boxed{C_v = 3R} \longrightarrow (16)$$

આ સમી. (16) ડ્યુલોંગ પેટિટનો નિયમ જ છે.

(ii) નીચાં તાપમાનોએ $\frac{C_v}{3R}$:-

નીચાં તાપમાનોએ $\frac{\theta_E}{T} >> 1$

આથી સમી. (14) માં $e^{\frac{\theta_E}{T}}$ પદ 1 ની સરખામણીમાં ઘણું જ મોટું હશે આથી $e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1 \approx e^{\theta_E/T}$ હવે સમી. (14) નીચેનું સ્વરૂપ ધારણ કરશે

$$\frac{C_v}{3R} = \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{e^{2\theta_E/T}}$$

$$\therefore \frac{C_v}{3R} = \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\theta_E/T} \longrightarrow (17)$$

સમી. (17) માં $e^{-\frac{\theta_E}{T}}$ પદ જ પ્રભુત્વ $(\theta_E/T)^2$ પદની સરખામણીમાં ઘણું જ વધારે હોવાથી

$$\boxed{\frac{C_v}{3R} \propto e^{-\theta_E/T}} \longrightarrow (18)$$

➤ <u>મર્યાદા</u> :- (i) ઉપરના સમી. (18) પરથી કહી શકાય કે નીચા તાપમાને વિશિષ્ટ ઉષ્મા $e^{-\frac{\theta_E}{T}}$ ના સમપ્રમાણમાં ઘટે છે. જ્યારે પ્રાયોગિક રીતે એવું જાણવા મળે છે કે મોટા ભાગના ઘન પદાર્થો માટે $T \rightarrow 0$ નિરપેક્ષ તાપમાનો માટે વિશિષ્ટ ઉષ્મા T^3 ના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આમ નીચા તાપમાને આઇન્સ્ટાઇનના વાદમાં સહેજ વધારે સારી ધારણાઓ આ માટે જવાબદાર હોવી જોઈએ.
(ii) બધા દોલકોની આવૃત્તિ સમાન છે તેવી ધારણા પરમાણુઓ વચ્ચેની આંતરક્રિયા અવગણવાનો નિર્દેશ કરે છે જે વાસ્તવિક પરિસ્થિતિથી ઘણી દૂર છે.

પ્રશ્ન:૨ ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા માટેનો ડી-બાયનો વાદ આપો અને ડી-બાયનો T^3 નિયમ મેળવો. [99(6), 03(10), 01(12)

આઈન્સ્ટાઈને સ્ફટિકમાં દરેક પરમાણુને સમાન આવૃત્તિથી સ્વતંત્ર રીતે દોલન કરતાં કલ્પ્યા તેથી તેના વાદની ખામીઓ મોટી જણાઈ હતી. આની સામે પીટર ડી-બાય (1912)માં જોઈ શક્યા કે સ્ફટિકમાંથી ધ્વનિ-તરંગો જેવા નાની આવૃત્તિવાળા તરંગોથી માંડીને ઈન્ફ્રારેડ જેટલી મોટી આવૃત્તિ-વાળા તરંગો પસાર થઈ શકે છે. આનો અર્થ એ થયો કે સ્ફટિકમાં આ બધી આવૃત્તિ વાળા દોલનો શક્ય છે. આથી ડી બાયે સમગ્ર સ્ફટિકના મોડ્સ ઓફ ઓસિલેશન ધ્યાનમાં લેવાનું નક્કી કર્યું. આ માટે તેણે સ્ફટિકને ત્રિપરિમાણમાં સતત એવા માધ્યમ તરીકે વિચાર્યો. જ્યાં સુધી તરંગલંબાઈ સ્ફટિકમાં બે નજીકતમ પરમાણુઓ વચ્ચેના અંતરની સરખામણીમાં મોટી હોય ત્યાં સુધી આ ધારણા ન્યાયસંગત છે.

એફ.વાય. બી.એસસી.માં આપણે દોરી (એક પરિમાણિક સતત માધ્યમ)ના મોડ્સ ઓફ ઓસિલેશન વિશે જાણી ગયા છીએ. વળી, કાળા પદાર્થના વિકિરણ માટે રેલેજનો નિયમ જાણતી વખતે કોઈ પેટીમાં રહેલા વિકિરણના મોડ્સ ઓફ ઓસિલેશન વિશે પણ આપણે વિચાર્યું છે. અહીં પેટીમાં વિકિરણને બદલે આપણે L લંબાઈના ત્રિપારિમાણીક (સમઘન) સ્ફટિકના સતત વિતરિત થયેલા કણના દોલનોનો વિચાર કરવાનો છે. ગણિતની રીતે પ્રશ્ન એક જ છે. આથી આપણે સમગ્ર અર્થનું પુનઃ પુનરાવર્તન કરીશું નહિ, માત્ર અર્થના અગત્યના મુદ્દાઓ ફરી વાર નોંધી જઈશું.

મુખ્ય વાત છે નિશ્ચિત સીમા શરતો સાથે ત્રિપારિમાણીક તરંગ સમી.ના શક્ય ઉકેલો મેળવવાની. આ સમી. નીચે પ્રમાણે છે.

$$\nabla^2 u(x,y,z,t) = \frac{1}{C_s^2}\frac{\partial^2 u}{dt^2}(x,y,z,t) \longrightarrow (1)$$

જ્યાં $u(x,y,z,t)$ એ બિંદુ (x,y,z) પાસેનું t સમયે સ્થાનાંતર દર્શાવે છે. C_s તરંગનો વેગ છે અને $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{C_s^2}\frac{\partial^2 u}{dt^2} \longrightarrow (1)$$

જો સમઘનની બધી બાજુઓ પર સ્થાનાંતર શૂન્ય લઈએ તો સમી.(1)ના શક્ય સ્થિત તરંગો પૂરાના ઉકેલો નીચે મુજબ મળી શકે.

$$u(x,y,z,t) = A\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)\cos(2\pi\nu \longrightarrow$$

જ્યાં n_x, n_y, n_z ધનપૂર્ણાંકો ≥ 1, ν = આવૃત્તિ અને A = કંપવિસ્તાર છે.

② નું બે વાર અનુક્રમે x, y, z સાપેક્ષે અને બે વાર t સાપેક્ષે વિકલન કરતાં

સમી. ① માં મૂકતાં,

$$-\frac{\pi^2}{L^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2) = \frac{-4\pi^2\nu^2}{C_s^2}$$

$$\therefore n_x^2+n_y^2+n_z^2 = \frac{4\nu^2L^2}{C_s^2} = R^2$$

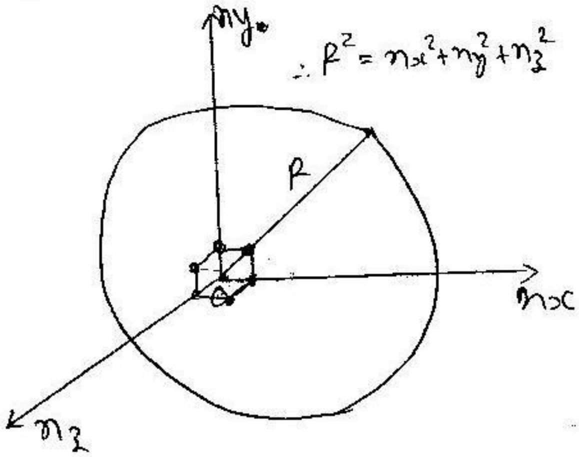
$$\therefore R = \frac{2\nu L}{C_s} \text{ અને } dR = \frac{2L}{C_s}d\nu \longrightarrow (3)$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = -(\ ''\ )\sin 2\pi\nu t\,(2\pi\nu)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -4\pi^2\nu^2(\ ''\ )\cos 2\pi\nu t$$

$$\therefore \frac{d^2u}{dt^2} = -4\pi^2\nu^2 u$$

સમી. ③ માં n_x, n_y, n_z ના શક્ય મૂલ્યો મૂકતાં આવૃત્તિ ν ના શક્ય મૂલ્યો મળી શકે છે. આ ગણતરી માટે n_x, n_y, n_z એમ ત્રણ લંબ અક્ષો આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ ધ્યાનમાં લો.



આ અવકાશમાં પ્રત્યેક બિંદુ n_x, n_y અને n_z અને તેથી ν નું એક શક્ય મૂલ્ય આપે છે. આથી જો આ અવકાશમાં R જેટલી ત્રિજ્યાનો ગોળો વિચારવામાં આવે તો (n_x, n_y, n_z) નાં ધન મૂલ્યો જ લેવાનાં હોવાથી તેના કદનો $\frac{1}{8}$ ભાગ ν = 0 થી ν = ν વચ્ચેની શક્ય આવૃત્તિઓનાં મૂલ્યો આપે છે. આમ, જેની આવૃત્તિઓ ν અને ν + dν વચ્ચે હોય તેવા મોડ્સ ઓફ ઓસિલેશનની સંખ્યા એટલે ઉપરોક્ત અવકાશમાં R અને R + dR વચ્ચેના કવચ ના કદનો આઠમો ભાગ,

$$\text{આ કદ} = \frac{1}{8}4\pi R^2 dR = \frac{\pi}{2}\frac{4\nu^2L^2}{C_s^2}\cdot\frac{2L}{C_s}d\nu \quad (\because \text{સમી. ③ પરથી})$$

હવે જો ν અને ν + dν વચ્ચેની આવૃત્તિવાળા મોડ્સ ઓફ ઓસિલેશનની સંખ્યાને Z(ν)dν વડે દર્શાવીએ તો,

$$Z(\nu)d\nu = \frac{4\pi\nu^2L^3}{C_s^3}d\nu$$

$$\therefore Z(\nu)d\nu = \frac{4\pi\nu^2V}{C_s^3}d\nu \quad (\because L^3 = V = \text{સ્ફટિકનું કદ}) \longrightarrow (4)$$

આ સમીકરણ ને ω = 2πν ના પદમાં લખતાં,

$$Z(\omega)d\omega = \frac{\omega^2V}{\pi C_s^3}d\omega \longrightarrow (5)$$

આ સમી જેમની કોણીય આવૃત્તિ ω અને ω + dω વચ્ચે છે તેવા મોડ્સ ઓફ ઓસિલેશનની સંખ્યા દર્શાવે છે.

અહીં સુધીની આપણી ચર્ચા સંપૂર્ણ સાતત્ય પદાર્થ જેવી જ છે. હવે સ્ફટિકમાંની વાસ્તવિકતાનો વિચાર કરીએ.

(i) ઉપરની ચર્ચામાં આપણે બધી આવૃત્તિવાળા તરંગોનો વેગ સરખો લીધો છે. હવે $C_s = \frac{\omega}{q}$ જ્યાં $q = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = તરંગ સદિશ

$$\therefore \omega = C_s q \longrightarrow (6)$$

ઉપરનું સમી. દર્શાવે છે કે ડી-બાયના વાદમાં ω અને q વચ્ચેનો વિભાજન સંબંધ રેખીય છે.

(ii) સ્ફટિકમાંથી પસાર થતાં તરંગની અસર હેઠળ થતા કોઈ પણ કણના સ્થાનાંતર $u(x, y, z, t)$ ના ત્રણ ઘટકો વિચારી શકાય. એક ઘટક તરંગ પ્રસરણની દિશામાં અને બે ઘટકો તરંગ પ્રસરણને લંબ દિશામાં. પ્રસરણની દિશામાંનો ઘટક સંગત દોલનો અને લંબદિશામાંના બે ઘટકો લંબગત દોલનોના મોડ દર્શાવે છે.

આથી સમી. (4) માં $\frac{1}{C_s^3} = \frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}$ લેવું જોઈએ.

અહીં C_t અને C_l અનુક્રમે લંબગત અને સંગત તરંગોના વેગ. હવે સમી. (4) નીચે પ્રમાણે લખી શકાશે,

$$Z(\nu)\,d\nu = 4\pi\nu^2 V\left(\frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}\right)d\nu \longrightarrow (7)$$

હવે સ્ફટિકમાં જો N પરમાણુઓ હોય તો કુલ મોડ્સ એટલે ઓસિલેટર 3N થાય, અર્થાત,

$$\int_0^{\nu_{max}} Z(\nu)\,d\nu = 3N = 4\pi V\left(\frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}\right)\int_0^{\nu_{max}} \nu^2 d\nu \longrightarrow (8)$$

સમી. (8) માં સંકલનની ઉપરની મર્યાદા ν_{max} લીધેલી છે. અહીં $Z(\nu)\,d\nu \propto \nu^2$ હોવાથી, કુલ મોડ્સની સંખ્યા પરિમિત રાખવા માટે સંકલનની ઉપરની મર્યાદા પરિમિત જ હોવી જોઈએ. બીજા શબ્દોમાં સ્ફટિકમાંથી ν_{max} જેટલી મહત્તમ આવૃત્તિ કરતાં વધારે આવૃત્તિવાળા તરંગો પસાર થઈ શકે નહિ. સમી. (8) પરથી

$$3N = 4\pi V\left(\frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}\right)\frac{\nu_{max}^3}{3}$$

$$4\pi V\left(\frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}\right) = \frac{9N}{\nu_{max}^3} \longrightarrow (9A)$$

અથવા

$$\nu_{max}^3 = \frac{9N}{4\pi V}\left(\frac{2}{C_t^3} + \frac{1}{C_l^3}\right)^{-1} \longrightarrow (9)$$

અહીં ν_{max} ને આપેલ સ્ફટિક માટે કટ ઓફ (cut-off) આવૃત્તિ કહે છે.

આગળ આપણે નોંધી ગયા છીએ કે દરેક મોડ એક ઓસિલેશન એક સરળ આવર્ત દોલકને સમતુલ્ય છે. આવા દોલકની સરેરાશ ઊર્જા પ્લાન્કના સૂત્ર અનુસાર, $\dfrac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$ લેતાં, સ્ફટિકની કુલ દોલન ઊર્જા;

$$E = \int_0^{\nu_{max}} Z(\nu)\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu$$

$$\therefore\ C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \int_0^{\nu_{max}} Z(\nu)\frac{h\nu}{\left(e^{h\nu/kT}-1\right)^2}\cdot e^{h\nu/kT}\cdot\frac{h\nu}{kT^2}\cdot d\nu$$

સમી. (7) માંથી $Z(\nu)\,d\nu$ ની અવેજ કરતાં,

$$C_V = \int_C^{\nu_{max}} 4\pi\nu^2 V\left(\frac{2}{C_t^3}+\frac{1}{C_l^3}\right)\frac{\frac{(h\nu)^2}{kT^2}\cdot e^{h\nu/kT}}{\left(e^{h\nu/kT}-1\right)^2}\cdot d\nu$$

સમી. (9A) પરથી $4\pi V\left(\dfrac{2}{C_t^3}+\dfrac{1}{C_l^3}\right) = \dfrac{9N}{\nu_{max}^3}$ આ કિંમત ઉપરનાં સમી. માં મૂકતાં,

$$C_V = \frac{9N}{\nu_{max}^3}\int_0^{\nu_{max}} \frac{\left(\frac{h^2\nu^2}{k^2T^2}\right)\left(\frac{k^2T^2}{h^2}\right)\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\cdot k\cdot e^{h\nu/kT}}{\left(e^{h\nu/kT}-1\right)^2}\cdot d\nu$$

$$\boxed{C_V = \frac{9Nk}{\nu_{max}^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^2\int_0^{\nu_{max}}\frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^4\cdot e^{h\nu/kT}}{\left(e^{h\nu/kT}-1\right)^2}\cdot d\nu} \longrightarrow (10)$$

હવે $\dfrac{h\nu}{kT} = x$ લેતાં, $\dfrac{dx}{d\nu} = \dfrac{h}{kT}$ $\therefore$ $d\nu = \dfrac{kT}{h}\,dx$

વળી $x_{max} = \dfrac{h\nu_{max}}{kT} = \dfrac{\theta_D}{T} \longrightarrow (11)$

ઉપરનાં સમી. માં $\boxed{\theta_D = \dfrac{h\nu_{max}}{k}}$ ને ડિબાય-તાપમાન કહે છે.

પ્રશ્ન:3 ગ્રુનેસન પ્રાચલ વિશે નોંધ લખો

અથવા

ઘન પદાર્થ માટે ગ્રુનેસન પ્રાચલ [01(4), 03(4),

$$\gamma = -\frac{r_0}{6}\frac{\phi'''(r_0)}{\phi''(r_0)}$$ તારવો.

સાબિતી:-

જેમ વાયુઓ પર દબાણ વધારીને જુદાં જુદાં દબાણોએ વાયુઓના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે, તે જ રીતે પ્રવાહીઓ અને ઘન પદાર્થોના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ પણ જુદાં-જુદાં દબાણોએ કરવામાં આવે છે. અલબત્ત અહીં દબાણનાં મૂલ્યો થોડા કિલોબારથી માંડી થોડા મેગાબારનાં ક્રમનાં હોય છે. (1 બાર = $10^5 N/m^2$)

હવે પદાર્થ પરનું દબાણ બદલીએ તો સ્પષ્ટ જ છે કે પદાર્થનું કદ પણ બદલાય છે. આ સ્થિતિમાં પદાર્થના દોલકોના દોલનોની આવૃત્તિઓમાં પણ ફેરફાર થાય છે.

આ માટે એવું ધારવામાં આવે છે કે દોલનની આવૃત્તિ ν એ V^{γ} ને વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. અર્થાત,

$$\nu = \frac{C}{V^{\gamma}} \quad \text{જ્યાં } C \text{ અચળ છે} \longrightarrow (1)$$

અહીં γ ને ગ્રુનેસનનો પ્રાચલ કહે છે તેનું મૂલ્ય પદાર્થની જાત, તાપમાન, કદ અને આવૃત્તિ પર આધાર રાખે છે. જો જુદી-જુદી આવૃત્તિઓ માટે γ ગણવામાં આવે તો તેમને mode ગ્રુનેસન પેરામીટર્સ કહે છે.

સમી. (1) પરથી $\ln\nu = \ln C - \gamma \ln V$

$$\therefore \partial(\ln\nu) = -\gamma\,\partial(\ln V)$$

$$\therefore \gamma = -\frac{\partial(\ln\nu)}{\partial(\ln V)}$$

$$\therefore \boxed{\gamma = -\frac{V}{\nu}\frac{\partial\nu}{\partial V}} \longrightarrow (2)$$

હવે ધારો કે પદાર્થના દરેક પરમાણુઓની જોડ વચ્ચે થતી આંતરક્રિયાને લીધે સ્થિતિઊર્જા $\phi(r)$ છે અહીં r એ એકબીજા સાથે આંતરક્રિયા કરતા બે કણો વચ્ચેનું અંતર છે. અહીં $\phi(r)$ એ r નું ઐચ્છિક વિધેય છે. આ વિધેય કણોની જાત પર આધાર રાખે છે.

અને $\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_{r_0}$ ને બળ અચળાંક β કહે છે જ્યાં r_0 = જોડકાં પરમાણુઓનું સમતોલન અંતર છે.

હવે એવું ધારવામાં આવે છે કે આવૃત્તિ ν એ બળ અચળાંક β નાં વર્ગમૂળ ને સમપ્રમાણમાં છે.

$$\therefore \quad \nu \propto \beta^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \nu = K\beta^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad d\nu = K\frac{1}{2\beta^{\frac{1}{2}}}d\beta$$

$$\therefore \quad \frac{d\nu}{\nu} = \frac{d\beta}{2\beta} \longrightarrow (3)$$

હવે $V \propto r^3$ હોવાથી, $dV \propto 3r^2 dr$. આ સમી. ને $V \propto r^3$ વડે ભાગતા,

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r} \longrightarrow (4)$$

સમી. (3) અને (4) નો ઉપયોગ સમી. (2) માં કરતાં,

$$\gamma = -\frac{d\beta}{2\beta} \Big/ 3\frac{dr}{r_0} \quad (\because \text{સમતોલન સ્થિતિએ } r = r_0)$$

$$\therefore \gamma = -\frac{r_0}{6}\left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dr}\right)$$

$$\therefore \boxed{\gamma = -\frac{r_0}{6}\frac{\phi'''(r_0)}{\phi''(r_0)}}$$ સાબિત થાય છે.

જ્યાં $\phi'''(r_0) = \left(\frac{d^3\phi}{dr^3}\right)_{r_0}$ અને $\phi''(r_0) = \left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_{r_0}$ છે.

~~~ x ~~~
~~~